Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 14

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding — mu@uni-bonn.de
Paul Manz
Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	14.1	14.3	14.4	14.5	$\sum$
Punkte	/ 4	/ 4	/ 4	/ 2	/ 14

14.1. Hauptzweig des Logarithmus

14.1a. $z_0 = 1$

Wir entwickeln um $z_0 = 1$. Die Ableitungen sind, wie im Reellen:

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} x^{-n}$$

Die Reihe ist mit $f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(z - z_0\right)^n$$

Diese Reihe konvergiert sogar absolut für alle z.

14.1b. $z_0 = -1 + \mathrm{i}$

Wir benutzen die gleichen Ableitungen, werten allerdings an $z_0 = -1 + \mathrm{i}$ aus.

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{i}}\right)^n \frac{1}{n!} \left(z - z_0\right)^n$$

Auch diese Reihe konvergiert absolut für alle z, also auch in $-1 - \epsilon\mathrm{i}$.

Da $-1+\mathrm{i}$ und $-1-\epsilon\mathrm{i}$ allerdings auf zwei verschiedenen Ebenen der Riemann'schen Fläche liegen, weichen die Funktionswerte um $2\pi\mathrm{i}$ voneinander ab.

14.3. holomorphe Funktionen

14.3b. zweite Funktion

Wir setzen $z = \frac{1}{n}$ und erhalten:

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z^2} - 1} = \frac{z^2}{1 - z^2}$$

Diese Funktion ist an den Stellen $z = \pm 1$ nicht definiert. Auf $B_1(0)$ gibt es allerdings keine weiteren Definitionslücken. Die Funktion ist auf dieser Kreisscheibe holomorph. Wenn wir $n > 1$ voraussetzen, gilt die Identität $f(1/n) = \left(n^2 - 1\right)^{-1}$ für alle n.

14.3d. vierte Funktion

Die Funktion $f \equiv 0$ erfüllt die Bedingung $\left|f(1/n)\right| \leq \mathrm{e}^{-n}$, wenn auch nicht besonders kreativ.

14.4. Entwicklung in Laurentreihen

14.4a. erste Funktion

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$f(z) = \frac{3}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2}$$

Wir beginnen mit dem ersten Summanden und schreiben diesen als geometrische Reihe:

$$-\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

Dabei müssen wir als Einschränkung $|z| > 1$ einfügen, da die Reihe sonst nicht konvergiert.

Den zweiten Summanden schreiben wir in eine normale Taylorreihe, da wir hier eine Konvergenzobergrenze erhalten möchten. Nur so können wir den Konvergenzring zwischen 1 und 2 erreichen. Würden wir hier ebenfalls in eine geometrische Reihe entwickeln[1], hätten wir im Konvergenzring $B_{2,\infty}(0)$ entwickelt.

Wir entwickeln in eine Reihe:

$$g(z) = \frac{1}{z-2} \implies g^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} \implies g^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \implies g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n$$

[1]

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

Diese Reihe konvergiert für alle $|z| < 2$.

Beide Summen schreiben wir zusammen:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n$$

14.4b. zweite Funktion

Es soll

$$f(z) = \frac{4z - z^2}{\left(z^2-4\right)(z+1)}$$

entwickelt werden. Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$f(z) = -\frac{3}{2}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z-2} - \frac{5}{3}\frac{1}{z+1}$$

Zu den einzelnen Summanden bilden wir die Maclaurinreihe:

1.
$$-\frac{3}{2}\frac{1}{z+2} = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n$$

2.
$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n$$

3.
$$\frac{5}{3}\frac{1}{z+1} = -\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

Zu jedem der Summanden bilden wir außerdem noch eine Art geometrische Reihe:

1.
$$-\frac{3}{2}\frac{1}{z+2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = -\frac{3}{2}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = 3\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n$$

2.
$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{6}\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n$$

3.

$$-\frac{5}{3}\frac{1}{z+1} = -\frac{5}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{5}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n$$

Nun müssen wir diese Teile geschickt kombinieren, je nach gewünschtem Konvergenzring. Wir beginnen mit $B_{1,2}(0)$. Dazu brauchen wir die geometrische Reihe des Termes mit Polstelle bei $|z| = 1$ und die Maclaurinreihen der Terme mit Polstelle bei $|z| = 2$. Zusammen also:

$$f(z) \restriction B_{1,2}(0) = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{5}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n$$

Für $B_{2,\infty}(0)$ benötigen wir nur die geometrischen Reihen von allen Summanden, da nur diese für beliebig große Summanden gelten:

$$f(z) \restriction B_{2,\infty}(0) = 3\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{6}\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{5}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n$$

Und für $B_{0,1}(0)$ brauchen wir nur die Maclaurinreihen, da diese nur für kleine $|z|$ gültig sind:

$$f(z) \restriction B_{0,1}(0) = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n - \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

14.5. Konvergenzbereiche

14.5a. erste Reihe

Wir zerlegen die Reihe in positiven und negativen Teil:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{z^k}{|k|!}$$

Der Konvergenzradius R der ersten Reihe ist ∞, da es die Exponentialfunktion ist:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$$

Für den zweiten Summanden ist der Konvergenzradius $r = 0$:

$$r = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$$

Da wir nur innerhalb des Kreisrings sicher Konvergenz haben, muss $0 < |z| < \infty$ gelten.

14.5b. zweite Reihe

Die Koeffizienten der zweiten Reihe sind:

$$a_k = 2\,\mathrm{sech}(ak)$$

Wir bestimmen die Konvergenzradien:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\mathrm{e}^{ak} + \mathrm{e}^{-ak}} \geq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\mathrm{e}^{ak}} = \mathrm{e}^{a}$$

Analog für r. Wir haben $r \geq \mathrm{e}^{a}$ als auch $R \leq \mathrm{e}^{-a}$. Die z, für die die Reihe konvergiert, sind also:

$$\mathrm{e}^{a} < |z| < \mathrm{e}^{-a}$$