Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 13

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding Paul Manz Lino Lemmer
mu@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	13.1	13.2	13.3	13.4	$\sum$
Punkte	0 / 3	/ 6	0 / 4	/ 3	/ 16

13.1. Integrale

13.2. Integrale

13.2a.

Es ist folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$$

Wir dürfen den Integralsatz nicht direkt anwenden, weil wir mehr als eine Singularität mit dem Weg umschlossen haben. Daher müssen wir erst eine Partialbruchzerlegung durchführen:

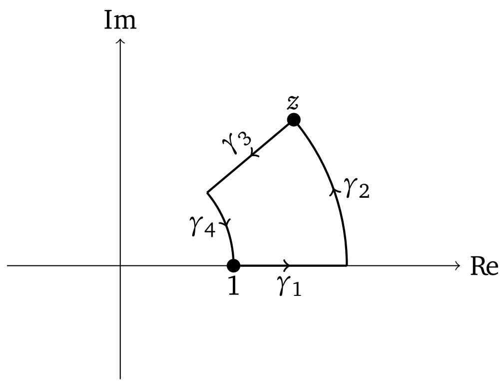
$$\frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{1+iz} + \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{1-iz}$$

Für diese beiden Integrale können wir den Satz nun anwenden und erhalten pro Summand $\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}$. Als Endergebnis erhalten wir $2\pi\mathrm{i}$.

13.3. Fouriertransformation

13.4. Hauptzweig des Logarithmus

Wir wählen folgenden Pfad:



Dabei sind unsere Parametrisierungen:

$\gamma_1\colon f(t) = t$ $t \in [1, |z|]$

$\gamma_2\colon f(t) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $t \in [0, \arg(z)]$

$\gamma_3\colon f(t) = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$ $t \in [|z|, 1]$

$\gamma_4\colon f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $t \in [\arg(z), |z|]$

Wir berechnen die einzelnen Integrale:

$$\int_1^{|z|} \mathrm{d}t\,\frac{1}{t} = \log\left(|z|\right)$$

$$\int_0^{\arg(z)} \mathrm{d}t\,\frac{1}{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{i}|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}\arg(z)$$

$$\int_{|z|}^{1} \mathrm{d}t\,\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)} = -\log\left(|z|\right)$$

$$\int_{\arg(z)}^{0} \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -\mathrm{i}\arg(z)$$

Die ersten beiden Integrale zusammen sind gerade:

$$\log\left(|z|\right)\mathrm{i}\arg(z)$$

Dies ist die Definition des komplexen Logarithmus.

Außerdem sind alle vier Integrale zusammen 0. Bei der Parametrisierung haben wir indirekt benutzt, dass das Gebiet sternförmig ist. Nur dadurch ist die Parametrisierung eindeutig gewesen. Weil das Ergebnis für jedes z aus $\mathbb{C}^-$ gilt, muss $\log(z)$ in $\mathbb{C}^-$ holomorph sein.