Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

Sofern im Dokuments nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

[disclaimer]

math340 – Übung 12

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding   Paul Manz   Lino Lemmer

mu@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	12.1	12.4	12.5	12.6	$\sum$
Punkte	/ 4	/ 3	/ 5	/ 3	/ 15

12.1. Betragsfunktion

12.1a. gerade Strecke

Wir wählen die Parametrisierung:

$$z(t) = (1-t) + \mathrm{i}t$$

Damit ist das Integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \mathrm{d}z\, f(z) &= \int_0^1 \mathrm{d}t\, f\left(z(t)\right)\dot{z}(t) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}t\, \left((1-t)+\mathrm{i}t\right)\left((1-t)-\mathrm{i}t\right)(-1+\mathrm{i}) \\
&= (-1+\mathrm{i})\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\, \left(1-2t+2t^2\right) \\
&= (-1+\mathrm{i})\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

12.1b. Kreisbogen

Wir wählen als Parametrisierung:

$$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

Somit ist das Integral:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \mathrm{d}z\, f(z) &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2}\pi \mathrm{i}\end{aligned}$$

12.4. Grenzwerte

12.4a. erster Grenzwert

Wir dürfen Integral und Grenzwert vertauschen, weil die Funktion stetig ist. Da f stetig ist, dürfen wir auch den Grenzwert in das Argument reinziehen. Somit bleibt:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, f(0) = 2\pi f(0)$$

12.4b. zweiter Grenzwert

Wir integrieren über den Kreisumfang, der allerdings gegen 0 geht. Daher können wir die Funktion durch ihre nullte Näherung ersetzen:

$$\lim_{r\to 0} \int_{|z|=r} \mathrm{d}z\, \frac{f(0)}{z}$$

Die nun konstante Funktion ziehen wir heraus und erhalten die Integralformel, die wir bereits in der Vorlesung hatten ($\oint \mathrm{d}z/z = 2\pi\mathrm{i}$). Somit ist der Ausdruck $f(0)2\pi\mathrm{i}$.

12.5. Parameterdarstellung

Wir müssen folgende Fälle unterscheiden:

Fall $k = 0$ Die Funktion ist konstant. Für eine solche Funktion gibt es eine Stammfunktion, es gilt also $\oint \ldots = 0$.

Fall $k > 0$ **oder** $k < -1$ Die Stammfunktion ist $F(z) = \frac{1}{k+1}\left(z - z_0\right)^{k+1}$. Die Riemann'sche Fläche, auf der die Funktion definiert ist, ist einfach $\mathbb{C}$, so dass auch hier $\oint \ldots = 0$ gilt.

Fall $k = -1$ Die Stammfunktion ist $F(z) = \ln\left(z - z_0\right)$, jedoch auf $2\pi n\mathrm{i}$ unbestimmt. Da die Riemann'sche Fläche die Spirale mit Zentrum z_0 ist, kommt hier $\oint \ldots = 2\pi\mathrm{i}$ heraus, falls z_0 von γ umschlossen wird. Ansonsten wechseln wir die Ebenen der Spirale nicht und erhalten wieder $\oint \ldots = 0$.

12.6. Sterngebiet

12.6a. Sterngebiet?

Nein, $\mathcal{G}$ ist kein Sterngebiet. Angenommen es wäre doch ein Sterngebiet mit Mittelpunkt g. Dann ist $z(t) = (1-t)g$ für $t \in [0,1]$ die Gerade vom Punkt g zu 0. Der Verbindungslinie von $g = z(0)$ zu $z(2)$ geht durch 0, und ist somit nicht möglich. g kann nicht der Mittelpunkt des Gebiets sein. Somit kann $\mathcal{G}$ nicht sternförmig sein.

12.6b. geschlossene Wege

Damit das Integral auf allen geschlossenen Wegen gleich 0 ist, muss die Funktion eine Stammfunktion haben. Diese bestimmen wir mit Partialbruchzerlegung:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
F(z) &= \ln(z-1) - \ln(2)
\end{aligned}
$$

Der komplexe Logarithmus ist nur auf ein Vielfaches von $2\pi\mathrm{i}$ definiert. Da wir allerdings die Differenz betrachten und keine Punkte zwischen 0 und 1 zulassen, gibt es nur Wege mit geradem Genus. Das Ergebnis $\oint \mathrm{d}z/z = 2\pi\mathrm{i}$ erhalten wir nur, wenn wir eine Fläche mit Genus 1 umspannen, was hier allerdings nicht geht.

Somit haben wir eine Stammfunktion und es gilt $\oint \mathrm{d}z\, f(z) = 0$ für alle erlaubten Wege.