Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 11

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding   Paul Manz   Lino Lemmer

mu@uni-bonn.de

2013-01-08

Aufgabe	11.1	11.2	11.3	11.5	$\sum$
Punkte	7 / 8	2 / 2	1 / 2	/ 4	10 / 16

11.1. holomorphe Funktionen

11.1a.

$$
\begin{aligned}
&u = xy, \quad v = xy \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\
&y = y \quad \wedge \quad x = -y \\
&y = -y \quad \wedge \quad x = -x \\
&x = 0 \quad \wedge \quad y = 0
\end{aligned}
$$

✓

Die Funktion ist nur im Punkt $z = 0$ komplex differenzierbar.

2/2

11.1c.

$$
\begin{aligned}
&u = -6\cos(x) + 2y^2 + 15\left(y^2 + 2y\right) \\
&v = -6\sin(x) - 2y^3 \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = 6\sin(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 + 15(2y+2), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -6\cos(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6y^2
\end{aligned}
$$

Das Gleichungssystem $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ haben wir in *Mathematica* Lösen lassen, das Ergebnis passte nicht mehr auf einen Bildschirm. Genähert erhalten wir folgende Lösungen (mit $n \in \mathbb{Z}$):

nicht sehr überraschend bei einer irrationalen Zahl :)

x	y
$+2.50956 - 3.01879\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.44323 + 2.85358\mathrm{i}$
$+2.50956 + 3.01879\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.44323 - 2.85358\mathrm{i}$
$-0.93877 - 0.77286\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.05677 - 0.23817\mathrm{i}$
$-0.93877 + 0.77286\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.05677 + 0.23819\mathrm{i}$

Hier fehlen noch Inhalte. Das sind aber keine reellen Lösungen! !

⇝ Es gibt keine Lsg.

⇝ f ist nirgends komplex diffbar. 1/2

11.1e.

$$f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z|} = \sqrt{|xy|}$$
$$u = \sqrt{|xy|}, \quad v = 0$$

Die Ableitungen sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{xy}} & xy > 0 \\ \frac{-y}{2\sqrt{-xy}} & xy < 0 \\ \infty & x = 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{xy}} & xy > 0 \\ \frac{-x}{2\sqrt{-xy}} & xy < 0 \\ \infty & y = 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

nicht definiert

Die Cauchy-Riemann Differentialgleichung sind allerdings nur erfüllt für:

$$(y = 0 \wedge x \neq 0) \wedge (x = 0 \wedge y \neq 0)$$

Sorry, ∧ war richtig

Somit ist die Funktion in keinem Punkt holomorph. 2/2

11.1f.

$$f(z) = z \operatorname{Re} z = (x + \mathrm{i}y)x = x^2 + \mathrm{i}xy$$
$$u = x^2, \quad v = xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$
$$2x = 0 \wedge y = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$$

✓ 2/2

ges. 7/8

11.2.

11.2b.

Gegeben ist:

$$u = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^{-y}\sin(x) - \mathrm{e}^{y}\cos(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \mathrm{e}^{-y}\cos(x) + \mathrm{e}^{y}\sin(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - \mathrm{e}^{-y}\sin(x) - \mathrm{e}^{y}\cos(x)$$

Es müssen die Cauchy-Riemann Differentialgleichung erfüllt sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$ ✓

Unser Gleichungssystem:

$$2x + e^{-y}\cos(x) + e^{y}\sin(x) = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$2y + e^{-y}\sin(x) + e^{y}\cos(x) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Wir integrieren die erste Gleichung nach y, die zweite nach x:

$$v = 2xy - e^{-y}\cos(x) + e^{y}\sin(x) + c_1(x)$$
$$v = 2xy - e^{-y}\cos(x) + e^{y}\sin(x) + c_2(y)$$ ✓

Dies kann nur erfüllt sein, wenn gilt:

$$c_1(x) = c_2(y) \iff c_1(x) = c_2(y) = c_3$$

Alle Funktionen v, so dass f holomorph ist, sind:

$$v = 2xy - e^{-y}\cos(x) + e^{y}\sin(x) + c_3$$ ✓

2/2

11.3.

Sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Nun gilt:

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$$
$$g'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)$$
$$= \overline{f'(\overline{z})}$$

$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}$ gilt nur, falls g tatsächlich holomorph ist. Das ist hier der Fall, müsste aber bewiesen werden (z.B. Cauchy-Riem.), für h stimmt es nicht.

Für die Funktion $h(z)$ gilt ähnlich:

$$h(z) = \overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$$
$$h'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$= \overline{f'(z)}$$

1/2

11.5.