Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 11

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding — mu@uni-bonn.de
Paul Manz
Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	11.1	11.2	11.3	11.5	$\sum$
Punkte	/ 8	/ 2	/ 2	/ 4	/ 16

11.1. holomorphe Funktionen

11.1a.

$$u = xy, \quad v = xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$y = y \quad \wedge \quad x = -y$$
$$y = -y \quad \wedge \quad x = -x$$
$$x = 0 \quad \wedge \quad y = 0$$

Die Funktion ist nur im Punkt $z = 0$ komplex differenzierbar.

11.1c.

$$u = -6\cos(x) + 2y^2 + 15\left(y^2 + 2y\right)$$
$$v = -6\sin(x) - 2y^3$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6\sin(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 + 15(2y+2), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -6\cos(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6y^2$$

Das Gleichungssystem $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ haben wir in *Mathematica* Lösen lassen, das Ergebnis passte nicht mehr auf einen Bildschirm. Genähert erhalten wir folgende Lösungen (mit $n \in \mathbb{Z}$):

x	y
$+2.50956 - 3.01879\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.44323 + 2.85358\mathrm{i}$
$+2.50956 + 3.01879\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.44323 - 2.85358\mathrm{i}$
$-0.93877 - 0.77286\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.05677 - 0.23817\mathrm{i}$
$-0.93877 + 0.77286\mathrm{i} + 2n\pi$	$-1.05677 + 0.23819\mathrm{i}$

Hier fehlen noch Inhalte. !

11.1e.

$$f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z|} = \sqrt{|xy|}$$
$$u = \sqrt{|xy|}, \quad v = 0$$

Die Ableitungen sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{xy}} & xy > 0 \\ \frac{-y}{2\sqrt{-xy}} & xy < 0 \\ \infty & x = 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{xy}} & xy > 0 \\ \frac{-x}{2\sqrt{-xy}} & xy < 0 \\ \infty & y = 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Die Cauchy-Riemann Differentialgleichung sind allerdings nur erfüllt für:

$$\big(y = 0 \wedge x \neq 0\big) \wedge \big(x = 0 \wedge y \neq 0\big)$$

Somit ist die Funktion in keinem Punkt holomorph.

11.1f.

$$f(z) = z \operatorname{Re} z = (x + \mathrm{i}y)x = x^2 + \mathrm{i}xy$$
$$u = x^2, \quad v = xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$
$$2x = 0 \wedge y = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$$

11.2.

11.2b.

Gegeben ist:

$$u = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^{-y} \sin(x) - \mathrm{e}^{y} \cos(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \mathrm{e}^{-y} \cos(x) + \mathrm{e}^{y} \sin(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - \mathrm{e}^{-y} \sin(x) - \mathrm{e}^{y} \cos(x)$$

Es müssen die Cauchy-Riemann Differentialgleichung erfüllt sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Unser Gleichungssystem:

$$2x + \mathrm{e}^{-y}\cos(x) + \mathrm{e}^{y}\sin(x) = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$2y + \mathrm{e}^{-y}\sin(x) + \mathrm{e}^{y}\cos(x) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Wir integrieren die erste Gleichung nach y, die zweite nach x:

$$v = 2xy - \mathrm{e}^{-y}\cos(x) + \mathrm{e}^{y}\sin(x) + c_1(x)$$
$$v = 2xy - \mathrm{e}^{-y}\cos(x) + \mathrm{e}^{y}\sin(x) + c_2(y)$$

Dies kann nur erfüllt sein, wenn gilt:

$$c_1(x) = c_2(y) \iff c_1(x) = c_2(y) = c_3$$

Alle Funktionen v, so dass f holomorph ist, sind:

$$v = 2xy - \mathrm{e}^{-y}\cos(x) + \mathrm{e}^{y}\sin(x) + c_3$$

11.3.

Sei $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} g(z) &= \overline{f\left(\overline{z}\right)} = u(x,-y) - \mathrm{i}v(x,-y) \\ g'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) \\ &= \overline{f'\left(\overline{z}\right)} \end{aligned}$$

Für die Funktion $h(z)$ gilt ähnlich:

$$\begin{aligned} h(z) &= \overline{f(z)} = u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y) \\ h'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ &= \overline{f'(z)} \end{aligned}$$

11.5.