Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 10

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding   Paul Manz   Lino Lemmer

mu@uni-bonn.de

2012-12-18

Aufgabe	10.2	10.3	10.5	$\sum$
Punkte	3 / 4	3 / 4	7 / 8	13 / 16

10.2. Real- und Imaginärteil

10.2a.

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1+\mathrm{i}}{1-(1+\mathrm{i})^2} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i} \\
\operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{5} \\
\operatorname{Im}(z) &= \frac{3}{5} \\
|z| &= \sqrt{\frac{2}{5}} \\
\arg(z) &= \arctan(-3) + 180^\circ
\end{aligned}
$$

Achtung! Der Arctan ist nur bis auf Vielfache von 180° das richtige Argument!

0,5/1

10.2b.

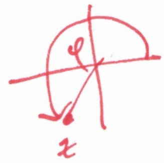
Begründung?

$$
\begin{aligned}
z &= \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{99} = -\mathrm{i} \\
\operatorname{Re}(z) &= 0 \\
\operatorname{Im}(z) &= -1 \\
|z| &= 1 \\
\arg(z) &= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

1/1

10.2c.

$$
\begin{aligned}
z = \frac{2-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+(1-\mathrm{i})^2} &= -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i} \\
\operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{5} \\
\operatorname{Im}(z) &= -\frac{2}{5} \\
|z| &= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ✓ \\
\arg(z) &= \arctan(2) + 180°
\end{aligned}
$$



0,5/1

10.2d.

$$
\begin{aligned}
z = \left(\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9 &= -16+16\mathrm{i} \\
\operatorname{Re}(z) &= -16 \\
\operatorname{Im}(z) &= 16 \\
|z| &= \sqrt{2}\cdot 16 \quad ✓ \\
\arg(z) &= \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

1/1

10.3. komplexe Gleichungen

10.3a.

$$
\begin{aligned}
z^7+4 &= 0 \\
z^7 &= -4 \\
\left(re^{\mathrm{i}\phi}\right)^7 &= -4 \\
r^7 e^{7\mathrm{i}\phi} &= -4
\end{aligned}
$$

r muss reell sein, also ist $r = \sqrt[7]{4}$. ✓ Nun muss die Exponentialfunktion noch die Phase richtig auf -1 bekommen.

$$
\begin{aligned}
e^{7\mathrm{i}\phi} &= -1 \\
7\phi &= \left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi \\
\phi &= \frac{2n+1}{\cancel{14}\;7}\pi \quad (✓)
\end{aligned}
$$

Die Lösungen sind alle $n = 0,\ldots,6$, also 7 Lösungen, mit $r = \sqrt[7]{4}$:

$$
\mathbb{L} = \left\{ r\angle\frac{1}{\cancel{14}\,7}\pi, r\angle\frac{3}{\cancel{14}\,7}\pi, r\angle\frac{5}{\cancel{14}\,7}\pi, r\angle\frac{7}{\cancel{14}\,7}\pi, r\angle\frac{9}{\cancel{14}\,7}\pi, r\angle\frac{11}{\cancel{14}\,7}\pi, r\angle\frac{13}{\cancel{14}\,7}\pi \right\}
$$

1,5/2

10.3b.

$$\begin{aligned} z^6 + 64 &= 0 \\ r^6 e^{6i\phi} &= -64 \end{aligned}$$

Wir wählen $r = \sqrt[6]{64}$.

$$\begin{aligned} e^{6i\phi} &= -1 \\ 6\phi &= \frac{2n+1}{2} 2\pi \\ \phi &= \frac{2n+1}{12} 2\pi \end{aligned}$$

Eindeutige Lösungen erhalten wir für $n = 0, \ldots, 5$, also 6 Lösungen. Mit $r = \sqrt[6]{64}$.

$$\mathbb{L} = \left\{ r\angle\frac{1}{\cancel{12}}\pi, r\angle\frac{3}{\cancel{12}}\pi, r\angle\frac{5}{\cancel{12}}\pi, r\angle\frac{7}{\cancel{12}}\pi, r\angle\frac{9}{\cancel{12}}\pi, r\angle\frac{11}{\cancel{12}}\pi, \right\}$$

6 6 6 6 6 6

1,5/2

10.5. Trigonometrie

10.5a. Identitäten

Die Definitionen der Funktionen sind:

$$\begin{aligned} \cosh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \\ \cos(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ \sin(z) &:= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \end{aligned}$$

Zusammen mit $1/i = -i$ ist zu sehen, dass $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\cos(z) = \cosh(iz)$ sowie $\sinh(z) = -i\sin(iz)$ und $\sin(z) = -i\sinh(iz)$ gilt.

Der trigonometrische Pythagoras:

$$\begin{aligned} \sin^2(z) + \cos^2(z) &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) \\ &= -\frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2iz} + \frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2iz} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2/2

10.5b. berechnen

$$\sin(\pi+3\mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+3\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+3\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3} - \mathrm{e}^{-3}\right) = -\mathrm{i}\sinh(3)$$

$$\cosh(\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\right) = \cos(1)$$

10.5c. Sinus

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= 1000 \\
\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) &= 1000 \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} &= 2000\mathrm{i} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})} &= 2000\mathrm{i} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}a-b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a+b} &= 2000\mathrm{i} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}a-b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a+b} &= \mathrm{e}^{\ln(2000)+\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

Wir setzen $a = \frac{1}{2}\pi$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}-b} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}+b} &= \mathrm{e}^{\ln(2000)+\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}} \\
\mathrm{i}\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{+b} &= 2000\mathrm{i} \\
\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{+b}\right) &= 1000 \\
\cosh(b) &= 1000 \\
b &\approx 7.6009
\end{aligned}$$

Die Lösung ist $z = \frac{1}{2}\mathrm{i}\pi + \operatorname{arcosh}(1000)\mathrm{i} \approx \frac{1}{2}\mathrm{i}\pi + 7.6009\mathrm{i}$.

Das ist eine Lösung, es gibt noch weitere.

1/2

10.5d. Gleichungen

Erste Gleichung:

$$\mathrm{e}^{x} = 3 \iff x = \ln(3) + 2n\pi\mathrm{i}, n \in \mathbb{Z}$$

Zweite Gleichung:

$$\mathrm{e}^{x} = 2+3\mathrm{i} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{2^2+3^2}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right)$$

$$x = \ln\left(\sqrt{15}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\pi\mathrm{i} + 2n\pi\mathrm{i}, n \in \mathbb{Z}$$

Dritte Gleichung:

$$\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}+2\pi\mathrm{i} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^2+4\pi^2}\right) + \arctan\left(\frac{2\pi}{\mathrm{e}}\right)\pi\mathrm{i}\right)$$

$$x = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^2+4\pi^2}\right) + \arctan\left(\frac{2\pi}{\mathrm{e}}\right)\pi\mathrm{i} + 2n\pi\mathrm{i}, n \in \mathbb{Z}$$

2/2