Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 10

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding — mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	10.2	10.3	10.5	$\sum$
Punkte	/ 4	/ 4	/ 8	/ 16

10.2. Real- und Imaginärteil

10.2a.

$$
\begin{aligned}
z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-(1+\mathrm{i})^2} &= -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i} \\
\operatorname{Re}(z) &= -\frac{1}{5} \\
\operatorname{Im}(z) &= \frac{3}{5} \\
|z| &= \sqrt{\frac{2}{5}} \\
\arg(z) &= \arctan(-3)
\end{aligned}
$$

10.2b.

$$
\begin{aligned}
z = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{99} &= -\mathrm{i} \\
\operatorname{Re}(z) &= 0 \\
\operatorname{Im}(z) &= -1 \\
|z| &= 1 \\
\arg(z) &= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

10.2c.

$$\begin{aligned} z = \frac{2-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}+(1-\mathrm{i})^2} &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i} \\ \mathrm{Re}(z) &= -\frac{1}{5} \\ \mathrm{Im}(z) &= -\frac{2}{5} \\ |z| &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \arg(z) &= \arctan(2) \end{aligned}$$

10.2d.

$$\begin{aligned} z = \left(\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9 &= -16+16\mathrm{i} \\ \mathrm{Re}(z) &= -16 \\ \mathrm{Im}(z) &= 16 \\ |z| &= \sqrt{2}\cdot 16 \\ \arg(z) &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

10.3. komplexe Gleichungen

10.3a.

$$\begin{aligned} z^7 + 4 &= 0 \\ z^7 &= -4 \\ \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^7 &= -4 \\ r^7\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\phi} &= -4 \end{aligned}$$

r muss reell sein, also ist $r = \sqrt[7]{4}$. Nun muss die Exponentialfunktion noch die Phase richtig auf -1 bekommen.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\phi} &= -1 \\ 7\phi &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \\ \phi &= \frac{2n+1}{14}\pi \end{aligned}$$

Die Lösungen sind alle $n = 0, \ldots, 6$, also 7 Lösungen, mit $r = \sqrt[7]{4}$:

$$\mathbb{L} = \left\{ r\angle\frac{1}{14}\pi, r\angle\frac{3}{14}\pi, r\angle\frac{5}{14}\pi, r\angle\frac{7}{14}\pi, r\angle\frac{9}{14}\pi, r\angle\frac{11}{14}\pi, r\angle\frac{13}{14}\pi \right\}$$

10.3b.

$$
\begin{aligned}
z^6 + 64 &= 0 \\
r^6 e^{6i\phi} &= -64
\end{aligned}
$$

Wir wählen $r = \sqrt[6]{64}$.

$$
\begin{aligned}
e^{6i\phi} &= -1 \\
6\phi &= \frac{2n+1}{2}\pi \\
\phi &= \frac{2n+1}{12}\pi
\end{aligned}
$$

Eindeutige Lösungen erhalten wir für $n = 0, \dots, 5$, also 6 Lösungen. Mit $r = \sqrt[6]{64}$.

$$
\mathbb{L} = \left\{ r\angle\frac{1}{12}\pi, r\angle\frac{3}{12}\pi, r\angle\frac{5}{12}\pi, r\angle\frac{7}{12}\pi, r\angle\frac{9}{12}\pi, r\angle\frac{11}{12}\pi, \right\}
$$

10.5. Trigonometrie

10.5a. Identitäten

Die Definitionen der Funktionen sind:

$$
\begin{aligned}
\cosh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \\
\sinh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \\
\cos(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
\sin(z) &:= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)
\end{aligned}
$$

Zusammen mit $1/i = -i$ ist zu sehen, dass $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\cos(z) = \cosh(iz)$ sowie $\sinh(z) = -i\sin(iz)$ und $\sin(z) = -i\sinh(iz)$ gilt.

Der trigonometrische Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
\sin^2(z) + \cos^2(z) &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) \\
&= -\frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2iz} + \frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2iz} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

10.5b. berechnen

$$\sin(\pi + 3\mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+3\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+3\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3} - \mathrm{e}^{-3}\right) = -\mathrm{i}\sinh(3)$$
$$\cosh(\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\right) = \cos(1)$$

10.5c. Sinus

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= 1000\\
\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) &= 1000\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} &= 2000\mathrm{i}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})} &= 2000\mathrm{i}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}a-b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a+b} &= 2000\mathrm{i}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}a-b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a+b} &= \mathrm{e}^{\ln(2000)+\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

Wir setzen $a = \frac{1}{2}\pi$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}-b} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}+b} &= \mathrm{e}^{\ln(2000)+\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}}\\
\mathrm{i}\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{+b} &= 2000\mathrm{i}\\
\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{+b}\right) &= 1000\\
\cosh(b) &= 1000\\
b &\approx 7.6009
\end{aligned}$$

Die Lösung ist $z = \frac{1}{2}\mathrm{i}\pi + \operatorname{arcosh}(1000)\mathrm{i} \approx \frac{1}{2}\mathrm{i}\pi + 7.6009\mathrm{i}$.

10.5d. Gleichungen

Erste Gleichung:

$$\mathrm{e}^{x} = 3 \iff x = \ln(3) + 2n\pi\mathrm{i}, n \in \mathbb{Z}$$

Zweite Gleichung:

$$\mathrm{e}^{x} = 2 + 3\mathrm{i} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{2^2+3^2}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\pi\mathrm{i}\right)$$
$$x = \ln\left(\sqrt{15}\right) + \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\pi\mathrm{i} + 2n\pi\mathrm{i}, n \in \mathbb{Z}$$

Dritte Gleichung:

$$\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e} + 2\pi\mathrm{i} = \exp\left(\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^2+4\pi^2}\right) + \arctan\left(\frac{2\pi}{\mathrm{e}}\right)\pi\mathrm{i}\right)$$
$$x = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^2+4\pi^2}\right) + \arctan\left(\frac{2\pi}{\mathrm{e}}\right)\pi\mathrm{i} + 2n\pi\mathrm{i}, n \in \mathbb{Z}$$