Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 9

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2012-12-11

Aufgabe	9.1	9.2	9.3	$\sum$
Punkte	6 / 7	4 / 5	3 / 3	13 / 15

9.1 Fouriertransformierte

9.1a

Gesucht ist die Fouriertransformierte von $f_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ für $a > 0$. Ich berechne

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) \cdot \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|} \cdot \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-i\omega)x} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+i\omega)x} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\omega} \mathrm{e}^{(a-i\omega)x} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+i\omega} \mathrm{e}^{-(a+i\omega)x} \Big|_{0}^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\omega^2} \quad ✓
\end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|f_a(x)\right|^2 \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-a|x|}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-2a|x|}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2ax}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2ax}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{2ax}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-2ax}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{a} \checkmark
\end{aligned}
$$

2/2

9.1b

Hier fehlen noch Inhalte.

9.2 Dirichletproblem

Gelöst werden soll die Laplacegleichung mit Randbedingung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \wedge \quad u(x,0) = f(x)$$

Das ist keine Definition!

Wir setzen:

$$W(\omega, y) := (\mathscr{F}_x u)(\omega, y), \quad W_0(\omega) := (\mathscr{F}_x f)(\omega), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} := \mathscr{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\omega^2 W$$

Wir wenden die Fouriertransformation in $x \to \omega$, $\mathscr{F}_x$, auf die Differentialgleichung an und erhalten (unter Benutzung der Linearität):

$$\mathscr{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \mathscr{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \iff -\omega^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \checkmark$$

Diese Differentialgleichung können wir durch einen Exponentialansatz lösen:

$$W(\omega, y) = \left(c_1 \mathrm{e}^{\cancel{i}\omega y} + c_2 \mathrm{e}^{-\cancel{i}\omega y}\right) W_0(\omega)$$

Dies müssen wir rücktransformieren um eine Lösung u zu erhalten:

$$u(x,y) = \mathscr{F}_x^{-1}\left(\left(c_1 \mathrm{e}^{\cancel{i}\omega y} + c_2 \mathrm{e}^{-\cancel{i}\omega y}\right) W_0(\omega)\right)$$

Das Produkt lösen wir in eine Faltung in x auf.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_x^{-1} \left(c_1 e^{i\omega y} + c_2 e^{-i\omega y} \right) * \mathscr{F}_x^{-1} W_0(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_x^{-1} \left(c_1 e^{i\omega y} + c_2 e^{-i\omega y} \right) * f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(c_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega y} e^{i\omega x} + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{-i\omega y} e^{i\omega x} \right) * f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(c_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega(x+y)} + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega(x-y)} \right) * f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c_1}{i(x+y)} \left[e^{i\omega(x+y)} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{c_2}{i(x-y)} \left[e^{i\omega(x-y)} \right]_{-\infty}^{\infty} \right) * f(x)
\end{aligned}
$$

($\checkmark$)

Die eckigen Klammern sind undefiniert, es sei denn, es gilt $x + y = 0$, beziehungsweise $x - y = 0$. Eine Spektralfunktion, die überhaupt nicht lokalisiert ist, sollte als ursprüngliche Funktion eine haben, die unendlich lokalisiert ist. Dann muss der Bruch allerdings zu einer δ-Distribution werden. Alle Vorfaktoren ziehen wir in die unbestimmten Konstanten.

$$
= \left(c_3 \delta\,(x + y) + c_4 \delta\,(x - y) \right) * f(x)
$$

Die Faltung in x ist ein Integral in x, so dass die δ-Distributionen aufgelöst werden können. Dabei werten wir diese bei $x \pm y - x = \pm y$ aus.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \left(c_3 \delta\,(y) + c_4 \delta\,(-y) \right) f(x) \\
&= c_3 f(y) + c_4 f(-y)
\end{aligned}
$$

Das ganze sieht jetzt ein wenig aus wie Ladung und Spiegelladung. Durch die Symmetrie in x taucht diese Variable auch nicht mehr explizit auf.

Ihr habt leider ein i drinnen, das da nicht sein soll. Dadurch kriegt ihr die δ-Distrib. als Fouriertransformierte, eigentlich kommt aber $\frac{2y}{x^2+y^2}$ raus.

4/5

9.3 Zeitsignal

Es soll die Gesamtenergie eines Signals mit Spektralfunktion F bestimmt werden:

$$
F(\omega) = \frac{\sqrt{|\omega|}}{1 + \omega^2}
$$

Wir berechnen die Gesamtenergie:

$$
W = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \left| f(t) \right|^2
$$

Praktischerweise können wir hier die Fouriertransformation auf die Funktion anwenden, ohne dass sich das Integral ändert (Plancherel). $\checkmark$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \left| (\mathscr{F} f)(\omega) \right|^2
$$

Dies ist gerade die gegebene Spektralfunktion.

$$
= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \left| F(\omega) \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{|\omega|}{\left(1 + \omega^2\right)^2} = 2 \int_0^{\infty} d\omega \, \frac{\omega}{\left(1 + \omega^2\right)^2}
$$

$\checkmark$

Wir substituieren $z(\omega) := 1+\omega^2$ mit $dz/(2\omega) = d\omega$.

$$= \int_{z(0)}^{z(\infty)} dz\,\frac{1}{z^2} = \left[-\frac{1}{z}\right]_{z(0)}^{z(\infty)} = \left[-\frac{1}{1+\omega^2}\right]_0^{\infty} = 1$$ ✓

3/3

9.1.

b)

gegeben: $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

gesucht: $\mathcal{F}f(\omega)$

setze an: $\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}f(\omega) = \mathcal{F}(ixf(x))(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{ix}{(1+x^2)^2}\right)(\omega) = \frac{i}{2}\mathcal{F}\left[\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right](\omega)$

$g(x) := \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}\mathcal{F}f(\omega) = -\frac{i}{2}\mathcal{F}(g'(x))(\omega) = \frac{i}{2}\cdot i\omega\,\mathcal{F}g(\omega) = -\frac{\omega}{2}\mathcal{F}g(\omega) = \frac{-\omega}{2}e^{-|\omega|}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (siehe Teil a) ✓

$\mathcal{F}f(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int -\frac{\omega}{2}e^{-|\omega|}\,d\omega$

$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases} \frac{\omega}{2}e^{-\omega} + \frac{e^{-\omega}}{2} + C_1 & \omega \geq 0 \\ \frac{-\omega}{2}e^{\omega} + \frac{e^{-\omega}}{2} + C_2 & \omega < 0 \end{cases}$

$\mathcal{F}f$ muss L^2 sein

$\rightsquigarrow C_1 = C_2 = 0$

$\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \overset{\text{Plancherel}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-|x|})^2\,dx = \frac{\pi}{2}$ (Teil a)

$\rightsquigarrow \mathcal{F}f(0) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

(Die Fouriertransformierte ist def. als

$\mathcal{F}f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$.)

$\Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

$C_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{F}f(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{2}e^{-\omega} - \frac{e^{-\omega}}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} & \omega \geq 0 \\ -\frac{\omega}{2}e^{\omega} + \frac{e^{-\omega}}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$

Schöne Lösung!

4/5