Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 9

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	9.1	9.2	9.3	$\sum$
Punkte	/ 7	/ 5	3	/ 15

9.1 Fouriertransformierte

9.1a

Gesucht ist die Fouriertransformierte von $f_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ für $a > 0$. Ich berechne

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) \cdot \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|} \cdot \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|-i\omega x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-i\omega)x} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+i\omega)x} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\omega} \mathrm{e}^{(a-i\omega)x} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+i\omega} \mathrm{e}^{-(a+i\omega)x} \Big|_{0}^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{a}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

Die Gesamtenergie ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|f_a(x)\right|^2 \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-a|x|}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2ax} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2ax} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2a} \mathrm{e}^{2ax} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2a} \mathrm{e}^{-2ax} \Big|_{0}^{\infty}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{a}$$

9.2 Dirichletproblem

Gelöst werden soll die Laplacegleichung mit Randbedingung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \wedge \quad u(x,0) = f(x)$$

Wir setzen:

$$W(\omega, y) := \left(\mathscr{F}_x u\right)(\omega, y), \quad W_0(\omega) := \left(\mathscr{F}_x f\right)(\omega), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} := \mathscr{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\omega^2 W$$

Wir wenden die Fouriertransformation in $x \to \omega$, $\mathscr{F}_x$, auf die Differentialgleichung an und erhalten (unter Benutzung der Linearität):

$$\mathscr{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \mathscr{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \iff -\omega^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

Diese Differentialgleichung können wir durch einen Exponentialansatz lösen:

$$W(\omega, y) = \left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega y} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\right) W_0(\omega)$$

Dies müssen wir rücktransformieren um eine Lösung u zu erhalten:

$$u(x,y) = \mathscr{F}_x^{-1}\left(\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega y} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\right) W_0(\omega)\right)$$

Das Produkt lösen wir in eine Faltung in x auf.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_x^{-1}\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega y} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\right) * \mathscr{F}_x^{-1} W_0(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_x^{-1}\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega y} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\right) * f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\right) * f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x+y)} + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-y)}\right) * f(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{c_1}{\mathrm{i}(x+y)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x+y)}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{c_2}{\mathrm{i}(x-y)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-y)}\right]_{-\infty}^{\infty}\right) * f(x)
\end{aligned}$$

Die eckigen Klammern sind undefiniert, es sei denn, es gilt $x+y=0$, beziehungsweise $x-y=0$. Eine Spektralfunktion, die überhaupt nicht lokalisiert ist, sollte als ursprüngliche Funktion eine haben, die unendlich lokalisiert ist. Dann muss der Bruch allerdings zu einer δ-Distribution werden. Alle Vorfaktoren ziehen wir in die unbestimmten Konstanten.

$$= \left(c_3 \delta\left(x+y\right) + c_4 \delta\left(x-y\right)\right) * f(x)$$

Die Faltung in x ist ein Integral in x, so dass die δ-Distributionen aufgelöst werden können. Dabei werten wir diese bei $x \pm y - x = \pm y$ aus.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \Big(c_3 \delta\big(y\big) + c_4 \delta\big(-y\big)\Big) f(x)$$
$$= c_3 f(y) + c_4 f(-y)$$

Das ganze sieht jetzt ein wenig aus wie Ladung und Spiegelladung. Durch die Symmetrie in x taucht diese Variable auch nicht mehr explizit auf.

9.3 Zeitsignal

Es soll die Gesamtenergie eines Signals mit Spektralfunktion F bestimmt werden:

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{|\omega|}}{1 + \omega^2}$$

Wir berechnen die Gesamtenergie:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \big|f(t)\big|^2$$

Praktischerweise können wir hier die Fouriertransformation auf die Funktion anwenden, ohne dass sich das Integral ändert (Plancherel).

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \Big|\big(\mathscr{F} f\big)(\omega)\Big|^2$$

Dies ist gerade die gegebene Spektralfunktion.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \big|F(\omega)\big|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{|\omega|}{\big(1+\omega^2\big)^2} = 2 \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{\omega}{\big(1+\omega^2\big)^2}$$

Wir substituieren $z(\omega) := 1 + \omega^2$ mit $\mathrm{d}z/(2\omega) = \mathrm{d}\omega$.

$$= \int_{z(0)}^{z(\infty)} \mathrm{d}z \, \frac{1}{z^2} = \left[-\frac{1}{z}\right]_{z(0)}^{z(\infty)} = \left[-\frac{1}{1+\omega^2}\right]_0^{\infty} = 1$$