Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 8

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2012-12-04

Aufgabe	8.1	8.3	$\sum$
Punkte	4 / 10	3 / 5	6 / 15

8.1 Eigenschaften der Legendrepolynome

8.1a P berechnen

Wir benutzen die Formel (1) und setzen ein:

$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$
$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4} + \frac{3}{8}x^2$$

2/2

8.1b $P(\pm 1)$

Wo?

In der anderen Aufgabe haben wir bereits hergeleitet, dass gilt (1):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l = \frac{1}{2^l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (x-1)^i (x+1)^{l-i}$$

Wenn wir dort $x = 1$ einsetzen, sind alle Potenten von $(x-1)$ gleich 0, außer wenn $i = 0$ ist. Dann ist allerdings $(x+1)^l$ gerade 2^l. Somit ist $P_l(1) = 1$.

Für $x = -1$ gilt das gleiche Argument, die verbleibende Klammer ist allerdings $(-2)^l$, so dass $P_l(-1) = (-1)^l$ bleibt.

2/2

8.1c Orthogonalität

Hier fehlen noch Inhalte.

8.1d Differentialgleichung erfüllen

Hier fehlen noch Inhalte.

8.3 Dirichtletproblem

Die Randbedingung formen wir um:

$$u(x,y,z) = z^4 \quad \Leftrightarrow \quad u(r,\theta,\phi) = r^4 \cos^4\theta$$

Wir setzen $r = R$ ein und erhalten als Randbedingung eine Funktion auf der Kugelfläche:

$$u_R(\theta,\phi) = R^4 \cos^4\theta$$

Da $\frac{\partial u_R}{\partial \phi} = 0$, können wir ϕ aus den Argumenten streichen. Außerdem setzen wir $\cos\theta =: x$ um die weiteren Rechnungen übersichtlicher zu gestalten. Somit erhalten wir als Randbedingung:

$$\tilde{u}(x) = x^4 \cdot R^4$$

Diese Funktion entwickeln wir nun nach Kugelflächenfunktionen. Aus der Symmetrie in ϕ müssen die $m = 0$ sein. Somit bleiben die l. Die Koeffizienten K_l^m bestimmen wir über das Skalarprodukt:

$$\left\langle \tilde{u}, Y_l^0 \right\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, u Y_l^{0*}$$

Dabei sind die Kugelflächenfunktionen gegeben durch:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

Allerdings ist hier gerade $m = 0$, so dass sich das ganze noch weiter vereinfacht.

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \checkmark$$

Wir setzen die Formel von Rodriguez ein.

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

8.3a Bestimmung der Koeffizienten

Wir setzen unsere Funktion $\tilde{u}$ ein und bestimmen somit die Koeffizienten. Dabei haben wir $\int \mathrm{d}\phi$ schon zu 2π ausgewertet und gekürzt.

$$K_l^0 = \sqrt{(2l+1)\pi} \frac{1}{2^l l!} R^4 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, x^4 \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

An dieser Stelle müssen wir in l eine Fallunterscheidung machen.

Fall $l = 0$ Das Integral vereinfacht sich, weil das Polynom entfällt. Somit bleibt ein Polynom, dessen Integral ist:

$$\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$

Der erste Koeffizient ist damit dann:

$$K_0^0 = \frac{2}{5}\sqrt{\pi} R^4 \checkmark$$

Fall $l > 0$ Jetzt müssen wir partielle Integration benutzen, wir erhalten:

$$K_l^0 = \underbrace{\left[x^4 \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(x^2 - 1\right)^l \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, 4x^3 \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(x^2-1\right)^l$$

Die eckige Klammer wird 0. Dies können wir dadurch sehen, dass wir die Produktregel $l-1$ mal anwenden und sich dann ein pascalsches Dreieck aus Summanden bildet. Diese können wir analog zu den binomischen Formeln schreiben als:

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2-1\right)^l = l! \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (x-1)^i (x+1)^{l-i} \qquad (1)$$

← Das nennt man Leibnitzregel

Wenn wir dort -1 oder 1 einsetzen, wird immer 0 herauskommen. Somit sind alle derartigen Klammern, die noch in den weiteren Fällen auftreten werden, 0 und wir werden sie daher in den nächsten Fällen weglassen. ✓ Gut!

Für den jetzt verbleibenden Integranden müssen wir erneut eine Fallunterscheidung machen.

Fall $l = 1$ In diesem Fall ist der Integrand wieder einfach und wir erhalten als Integral:

$$\left[x^4\right]_{-1}^{1} = 0$$

Der Integrand ist aber $4x^3(x^2-1)$.

Somit ist $R_1^0 = 0$. Alle ungerade Koeffizienten werden 0 sein, weil wir eine gerade Funktion entwickeln. ✓

Fall $l > 1$ Wieder führen wir eine partielle Integration aus und erhalten:

$$K_l^0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, 12x^2 \frac{\mathrm{d}^{l-2}}{\mathrm{d}x^{l-2}} \left(x^2-1\right)^l$$

Fall $l = 2$ Das Integral ist:

$$\left[4x^3\right]_{-1}^{1} = 8$$

Der Integrand ist $12x^2(x^2-1)^2$ ...

Daraus folgt für den Koeffizienten:

$$K_2^0 = \sqrt{5\pi} R^4$$

f

Fall $l > 2$ Durch partielle Integration erhalten wir:

$$K_l^0 = -\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, 24x \frac{\mathrm{d}^{l-3}}{\mathrm{d}x^{l-3}} \left(x^2-1\right)^l$$

Fall $l = 3$ Das Integral ist:

$$\left[12x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

s.o.

Fall $l > 3$ Partielle Integral liefert:

$$K_l^0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, 24 \frac{\mathrm{d}^{l-4}}{\mathrm{d}x^{l-4}} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Fall $l = 4$ Das Integral ist:

$$[24x]_{-1}^{1} = 48$$ s.o.

Der Koeffizient ist:

$$K_4^0 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}R^4$$ f

Fall $l > 4$ Eine weitere partielle Integration wird 0 ergeben. Also sind alle Koeffizienten nach dem vierten gleich 0.

8.3b Funktion zusammensetzen

Wir stellen die interessanten Koeffizienten zusammen:

$$K_0^0 = \frac{2}{5}\sqrt{\pi}R^4, \quad K_2^0 = \sqrt{5\pi}R^4, \quad K_4^0 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}R^4$$

Somit können wir die Funktion als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen darstellen:

$$\tilde{u}(x) = \left(\frac{2}{5}P_0(x) + \sqrt{5}P_2(x) + \frac{3}{8}P_4(x)\right)\sqrt{\pi}R^4$$

Der Sinn der ganzen Sache war jetzt der, dass die Kugelflächenfunktionen die Laplacegleichung lösen. Wir fügen noch ein $(r/R)^3$ ein, damit wir eine räumliche Kugelflächenfunktion erhalten. ↯
Somit die Lösung der Laplacegleichung mit den Randbedingungen:

Die Lösung der Laplacegleichung ist $r^k P_k(\cos\theta)$

$$u(r,\theta,\phi) = \cancel{\left(\frac{r}{R}\right)}^3 \left(\frac{2}{5}P_0(\cos\theta) + \sqrt{5}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4 P_4(\cos\theta)\right)\sqrt{\pi}R^4$$

Wir können noch $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sowie $\cos\theta =: \hat{z} := \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ einsetzen und erhalten so:

$$u(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}\right)^3 \left(\frac{2}{5}P_0(\hat{z}) + \sqrt{5}P_2(\hat{z}) + \frac{3}{8}P_4(\hat{z})\right)\sqrt{\pi}R^4$$

Die Koeffizienten sind leider falsch. Richtig ist: $u = R^4\left(\frac{1}{5}P_0 + \frac{4}{7}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2 + \frac{8}{35}\left(\frac{r}{R}\right)^4 P_4\right)$

Außerdem können wir die Legendrepolynome einsetzen und erhalten:

$$u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^3 \left(\frac{2}{5} + \sqrt{5}\frac{1}{2}\left(3\hat{z}^2 - 1\right) + \frac{3}{8}\frac{1}{8}\left(35\hat{z}^4 - 30\hat{z}^2 + 3\right)\right)\sqrt{\pi}R$$

Wir fassen die Potenzen zusammen und erhalten:

$$u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^3 \frac{\sqrt{\pi}R}{320}\left(173 - 160\sqrt{5} + \left(-450 + 480\sqrt{5}\right)\hat{z}^2 + 525\hat{z}^4\right)$$

3/5