Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 8

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	8.1	8.3	$\sum$
Punkte	/ 10	/ 5	/ 15

8.1 Eigenschaften der Legendrepolynome

8.1a P berechnen

Wir benutzen die Formel (1) und setzen ein:

$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$
$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4} + \frac{3}{8}x^2$$

8.1b $P(\pm 1)$

In der anderen Aufgabe haben wir bereits hergeleitet, dass gilt (1):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l = \frac{1}{2^l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (x-1)^i (x+1)^{l-i}$$

Wenn wir dort $x = 1$ einsetzen, sind alle Potenten von $(x-1)$ gleich 0, außer wenn $i = 0$ ist. Dann ist allerdings $(x+1)^l$ gerade 2^l. Somit ist $P_l(1) = 1$.

Für $x = -1$ gilt das gleiche Argument, die verbleibende Klammer ist allerdings $(-2)^l$, so dass $P_l(-1) = (-1)^l$ bleibt.

8.1c Orthogonalität

Hier fehlen noch Inhalte.

8.1d Differentialgleichung erfüllen

Hier fehlen noch Inhalte.

8.3 Dirichletproblem

Die Randbedingung formen wir um:

$$u(x,y,z) = z^4 \quad \Leftrightarrow \quad u(r,\theta,\phi) = r^4 \cos^4\theta$$

Wir setzen $r = R$ ein und erhalten als Randbedingung eine Funktion auf der Kugelfläche:

$$u_R(\theta,\phi) = R^4 \cos^4\theta$$

Da $\frac{\partial u_R}{\partial \phi} = 0$, können wir ϕ aus den Argumenten streichen. Außerdem setzen wir $\cos\theta =: x$ um die weiteren Rechnungen übersichtlicher zu gestalten. Somit erhalten wir als Randbedingung:

$$\tilde{u}(x) = x^4$$

Diese Funktion entwickeln wir nun nach Kugelflächenfunktionen. Aus der Symmetrie in ϕ müssen die $m = 0$ sein. Somit bleiben die l. Die Koeffizienten K_l^m bestimmen wir über das Skalarprodukt:

$$\left\langle \tilde{u}, Y_l^0 \right\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, u Y_l^{0*}$$

Dabei sind die Kugelflächenfunktionen gegeben durch:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}$$

Allerdings ist hier gerade $m = 0$, so dass sich das ganze noch weiter vereinfacht.

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

Wir setzen die Formel von Rodriguez ein.

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2-1\right)^l$$

8.3a Bestimmung der Koeffizienten

Wir setzen unsere Funktion $\tilde{u}$ ein und bestimmen somit die Koeffizienten. Dabei haben wir $\int \mathrm{d}\phi$ schon zu 2π ausgewertet und gekürzt.

$$K_l^0 = \sqrt{(2l+1)\pi} \frac{1}{2^l l!} R^4 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x^4 \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2-1\right)^l$$

An dieser Stelle müssen wir in l eine Fallunterscheidung machen.

Fall $l = 0$ Das Integral vereinfacht sich, weil das Polynom entfällt. Somit bleibt ein Polynom, dessen Integral ist:

$$\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$

Der erste Koeffizient ist damit dann:

$$K_0^0 = \frac{2}{5}\sqrt{\pi} R^4$$

Fall $l > 0$ Jetzt müssen wir partielle Integration benutzen, wir erhalten:

$$K_l^0 = \underbrace{\left[x^4 \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(x^2 - 1\right)^l \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, 4x^3 \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Die eckige Klammer wird 0. Dies können wir dadurch sehen, dass wir die Produktregel $l-1$ mal anwenden und sich dann ein pascalsches Dreieck aus Summanden bildet. Diese können wir analog zu den binomischen Formeln schreiben als:

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l = l! \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (x-1)^i (x+1)^{l-i} \tag{1}$$

Wenn wir dort -1 oder 1 einsetzen, wird immer 0 herauskommen. Somit sind alle derartigen Klammern, die noch in den weiteren Fällen auftreten werden, 0 und wir werden sie daher in den nächsten Fällen weglassen.

Für den jetzt verbleibenden Integranden müssen wir erneut eine Fallunterscheidung machen.

Fall $l = 1$ In diesem Fall ist der Integrand wieder einfach und wir erhalten als Integral:

$$\left[x^4\right]_{-1}^{1} = 0$$

Somit ist $R_1^0 = 0$. Alle ungerade Koeffizienten werden 0 sein, weil wir eine gerade Funktion entwickeln.

Fall $l > 1$ Wieder führen wir eine partielle Integration aus und erhalten:

$$K_l^0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, 12x^2 \frac{\mathrm{d}^{l-2}}{\mathrm{d}x^{l-2}} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Fall $l = 2$ Das Integral ist:

$$\left[4x^3\right]_{-1}^{1} = 8$$

Daraus folgt für den Koeffizienten:

$$K_2^0 = \sqrt{5\pi} R^4$$

Fall $l > 2$ Durch partielle Integration erhalten wir:

$$K_l^0 = -\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, 24x \frac{\mathrm{d}^{l-3}}{\mathrm{d}x^{l-3}} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Fall $l = 3$ Das Integral ist:

$$\left[12x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

Fall $l > 3$ Partielle Integral liefert:

$$K_l^0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, 24\, \frac{\mathrm{d}^{l-4}}{\mathrm{d}x^{l-4}} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Fall $l = 4$ Das Integral ist:

$$[24x]_{-1}^{1} = 48$$

Der Koeffizient ist:

$$K_4^0 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}R^4$$

Fall $l > 4$ Eine weitere partielle Integration wird 0 ergeben. Also sind alle Koeffizienten nach dem vierten gleich 0.

8.3b Funktion zusammensetzen

Wir stellen die interessanten Koeffizienten zusammen:

$$K_0^0 = \frac{2}{5}\sqrt{\pi}R^4, \quad K_2^0 = \sqrt{5\pi}R^4, \quad K_4^0 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}R^4$$

Somit können wir die Funktion als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen darstellen:

$$\tilde{u}(x) = \left(\frac{2}{5}P_0(x) + \sqrt{5}P_2(x) + \frac{3}{8}P_4(x)\right)\sqrt{\pi}R^4$$

Der Sinn der ganzen Sache war jetzt der, dass die Kugelflächenfunktionen die Laplacegleichung lösen. Wir fügen noch ein $\left(r/R\right)^3$ ein, damit wir eine räumliche Kugelflächenfunktion erhalten. Somit die Lösung der Laplacegleichung mit den Randbedingungen:

$$u(r,\theta,\phi) = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \left(\frac{2}{5}P_0(\cos\theta) + \sqrt{5}P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}P_4(\cos\theta)\right)\sqrt{\pi}R^4$$

Wir können noch $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sowie $\cos\theta =: \hat{z} := \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ einsetzen und erhalten so:

$$u(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}\right)^3 \left(\frac{2}{5}P_0\left(\hat{z}\right) + \sqrt{5}P_2\left(\hat{z}\right) + \frac{3}{8}P_4\left(\hat{z}\right)\right)\sqrt{\pi}R^4$$

Außerdem können wir die Legendrepolynome einsetzen und erhalten:

$$u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^3 \left(\frac{2}{5} + \sqrt{5}\frac{1}{2}\left(3\hat{z}^2 - 1\right) + \frac{3}{8}\frac{1}{8}\left(35\hat{z}^4 - 30\hat{z}^2 + 3\right)\right)\sqrt{\pi}R$$

Wir fassen die Potenzen zusammen und erhalten:

$$u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^3 \frac{\sqrt{\pi}R}{320}\left(173 - 160\sqrt{5} + \left(-450 + 480\sqrt{5}\right)\hat{z}^2 + 525\hat{z}^4\right)$$