Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 7

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2012-11-27

Aufgabe	7.1	7.2	7.3	Σ
Punkte	~~…~~ / 6 6/6	2 / 6	7 / 8	15/ 20

7.2 Separationsansatz

Wir benutzen $u(x,y) = v(x)w(y)$ und erhalten:

$$\frac{v''}{v} = \alpha^2 \quad \wedge \quad \frac{w''}{w} = \alpha^2$$ ✓

Diese Differentialgleichungen lösen wir durch einen Exponentialansatz. Die zusammengesetzte Lösung ist:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n e^{\alpha_n x} + b_n e^{-\alpha_n x}\right)\left(c_n e^{i\alpha_n y} + d_n e^{-i\alpha_n y}\right)$$

Warum nur abzählbar viele α_n?

Woher kommt diese Formel? −1P.

Nun müssen wir noch die Randbedingungen erfüllen. Dabei setzen wir schon $\sin^3(y) = \frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y)$ ein. Die vier Bedingungen sind:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n e^{\alpha_n x} + b_n e^{-\alpha_n x}\right)(c_n + d_n) = \sin(x) \tag{1}$$

$$u(0,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\left(c_n e^{i\alpha_n y} + d_n e^{-i\alpha_n y}\right) = \frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y) \tag{2}$$

$$u(x,\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n e^{\alpha_n x} + b_n e^{-\alpha_n x}\right)\left(c_n e^{i\alpha_n \pi} + d_n e^{-i\alpha_n \pi}\right) = 0 \tag{3}$$

$$u(\pi,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n e^{\alpha_n \pi} + b_n e^{-\alpha_n \pi}\right)\left(c_n e^{i\alpha_n y} + d_n e^{-i\alpha_n y}\right) = 0 \tag{4}$$

Bedingungen aus (1) Für mindestens ein n muss gelten:

$$c_n + d_n \neq 0$$

Ein Summand sollte ausreichen, um das $\sin(x)$ zu erreichen. Dieses sei das 0. Element. Es muss gelten:

$$\alpha_0 = 1 \quad \wedge \quad a_0 = -b_0 \quad \wedge \quad 2a_0(c_0 + d_0) = 1$$ ✓

Bedingungen aus (2) Für mindestens ein n muss gelten:

$$a_n + b_n \neq 0$$

Da die Exponentialfunktionen eine Basis für den L^2 bilden, sollten zwei Summanden ausreichen, um auf die geforderten $\frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y)$ zu kommen. Diese Summanden seien die ersten beiden. Für den ersten Summanden erhalten wir folgende Bedingungen:

$$(a_0 + b_0)\frac{c_0}{2} = \frac{3}{4} \quad \wedge \quad c_0 = -d_0 \quad \wedge \quad \alpha_0 = 1$$

Sowie durch den zweiten Summanden:

$$(a_1 + b_1)\frac{c_1}{2} = -\frac{1}{4} \quad \wedge \quad c_1 = -d_1 \quad \wedge \quad \alpha_1 = 3$$

Bedingungen aus (3) Es muss für alle n gelten, dass: ~~Nein, nicht für alle n~~

$$\left(c_n e^{i\alpha_n \pi} + d_n e^{-i\alpha_n \pi}\right) = 0 \quad ✓$$

Nur so ist gewährleistet, dass für alle x gerade 0 herauskommt. Dies können wir umformen zu:

$$-\frac{d_0}{c_0} = e^{2i\alpha_0 \pi}$$

Bedingungen aus (4) Analog zum vorherigen Abschnitt muss gelten für alle n gelten:

$$-\frac{b_0}{a_0} = e^{2\alpha_0 \pi}$$

Eventuell lässt sich auf diesem Wege die Koeffizienten so bestimmen, dass eine Lösung u herauskommt.

Eigentlich ist nicht mehr so viel zu tun. Du kannst OBdA alle a_n auf 1 setzen und dann b_n, c_n, d_n aus deinen Formeln ausrechnen.
2/6

7.3 Randwertaufgaben

7.3a

Wir nehmen an, dass die Funktion u nur von r abhängt. Somit vereinfacht sich die Poissongleichung zu:

$$\begin{aligned}
\triangle u(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) &= r \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) &= r^3 \\
r^2 \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{4}r^4 + c_1 \\
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{4}r^2 + c_1 \frac{1}{r^2} \\
u &= \frac{1}{12}r^3 + c_2 \frac{1}{r} + c_3 \quad (✓)
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist allerdings bei $r = 0$ nicht differenzierbar, womit $c_2 = 0$ gelten muss. Ansonsten hätten wir auch eine Randbedingung zu wenig. Es bleibt die Randbedingung:

$$u(R) = -\frac{1}{12}R^3 + c_3 = \pi R^3$$

Daraus leiten wir ab, dass $c_3 = (\pi + 1/12)\,R^3$ sein muss. Die Lösung lautet:

$$u(r) = \frac{1}{12}r^3 + \left(\pi + \frac{1}{12}\right)R^3$$

Wir machen die Probe und setzen u in die Poissongleichung ein:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4}r^2 \overset{r^2}{\rightsquigarrow} \frac{1}{4}r^4 \overset{\frac{\partial}{\partial r}}{\rightsquigarrow} r^3 \overset{r^{-2}}{\rightsquigarrow} r \checkmark$$

3/4

Die Funktion löst also die Poissongleichung.

7.3b

Hier können wir analog vorgehen:

$$\begin{aligned}
\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= 1 \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= r^2 \\
r^2\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{3}r^3 + c_1 \\
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{3}r + c_1\frac{1}{r^2} \\
u &= \frac{1}{6}r^2 + c_2\frac{1}{r} + c_3 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

✓

Hier muss die Funktion nicht bei $r = 0$ differenzierbar sein, so dass $c_2 \neq 0$ zulässig ist. Daher brauchen wir auch zwei Randbedingungen, um beide Konstanten zu bestimmen. Mit $u(1) = 0$ und $u(4) = 0$ erhalten wir $c_2 = 10/3$ und $c_3 = -7/2$. Die Lösung ist also:

$$u(r) = \frac{1}{6}r^2 + \frac{10}{3}\frac{1}{r} - \frac{7}{2} \quad \checkmark$$

4/4

Eigentlich war die Bedingung $u(2) = 0$ ($x^2+y^2+z^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$). Lass ich aber mal so durchgehen, weils fast alle falsch gemacht haben.

Aufgabe 7.1

gegeben ist folgendes Problem:

$\Delta u = 0$ auf $\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| > 1 \}$

$u(x) = g(x)$ für $\|x\| = 1$

$\lim\limits_{\|x\| \to \infty} u(x) = 0$

wissen: inneres Dirichlet - Problem für die Einheitskugel, d.i. $\Delta V = 0$ mit $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$

und $V(x) = g(x)$ für $\|x\| = 1$ wird gelöst durch

$$V(x) = \frac{1 - \|x\|}{4\pi} \int\limits_{|y|=1} do_y \, \frac{f(y)}{\|y - x\|^2} \qquad (*) \quad ✓$$

darüber hinaus gilt (Aufgabe 1.3 b): $\Delta V = 0 \Rightarrow \underbrace{\Delta \left(\frac{1}{\|x\|} V\left(\frac{x_1}{\|x\|^2}, \frac{x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_3}{\|x\|^2} \right) \right)}_{:= u(x^*)} = 0$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1 - \frac{1}{\|x\|}}{4\pi \|x\|} \int\limits_{|y|=1} do_y \, \frac{f(y)}{\left\| y - \frac{x}{\|x\|^2} \right\|} \quad ✓$$

Es gilt nun $\Delta u(x) = 0$ gemäß A 1.3b. ✓ Für $\|x\| = 1$ ist die Formel gleich $(*)$, weswegen auch das Randwertproblem gelöst ist. ✓ Darüber hinaus ist es auch eine Lösung außerhalb der Einheitskugel, denn für $\|x\| > 1$ ~~ist an den entsprechenden~~ gilt $\frac{x}{\|x\|^2} < 1$, an den entsprechenden Stellen stimmt der Wertebereich also mit dem von $(*)$ überein. ~~Der durch die Transformation auftritt~~ ?

Außerdem gilt

lim kann ins Integral gezogen werden, da $\{y : \|y\| = 1\}$ kompakt ist.

$$\lim_{\|x\| \to \infty} u(x) = \lim_{\|x\| \to \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{\|x\|}}{4\pi \|x\|} \right) \int do_y \, \frac{f(y)}{\left\| y - \lim\limits_{\|x\| \to \infty} \frac{x}{\|x\|^2} \right\|} = 0 \quad ✓$$

6/6

$\Rightarrow u(x)$ ist Lösung des Problems mit $H(x, y) = \dfrac{\dfrac{1 - \frac{1}{\|x\|}}{4\pi \, \|x\|}}{\left\| y - \frac{x}{\|x\|^2} \right\|}$