Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 7

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	7.1	7.2	7.3	$\sum$
Punkte	/ 6	/ 6	/ 8	/ 20

7.2 Separationsansatz

Wir benutzen $u(x,y) = v(x)w(y)$ und erhalten:

$$\frac{v''}{v} = \alpha^2 \quad \wedge \quad \frac{w''}{w} = \alpha^2$$

Diese Differentialgleichungen lösen wir durch einen Exponentialansatz. Die zusammengesetzte Lösung ist:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \mathrm{e}^{\alpha_n x} + b_n \mathrm{e}^{-\alpha_n x}\right)\left(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n y} + d_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_n y}\right)$$

Nun müssen wir noch die Randbedingungen erfüllen. Dabei setzen wir schon $\sin^3(y) = \frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y)$ ein. Die vier Bedingungen sind:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \mathrm{e}^{\alpha_n x} + b_n \mathrm{e}^{-\alpha_n x}\right)\left(c_n + d_n\right) = \sin(x) \tag{1}$$

$$u(0,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)\left(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n y} + d_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_n y}\right) = \frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y) \tag{2}$$

$$u(x,\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \mathrm{e}^{\alpha_n x} + b_n \mathrm{e}^{-\alpha_n x}\right)\left(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n \pi} + d_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_n \pi}\right) = 0 \tag{3}$$

$$u(\pi,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \mathrm{e}^{\alpha_n \pi} + b_n \mathrm{e}^{-\alpha_n \pi}\right)\left(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n y} + d_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_n y}\right) = 0 \tag{4}$$

Bedingungen aus (1) Für mindestens ein n muss gelten:

$$c_n + d_n \neq 0$$

Ein Summand sollte ausreichen, um das $\sin(x)$ zu erreichen. Dieses sei das 0. Element. Es muss gelten:

$$\alpha_0 = 1 \quad \wedge \quad a_0 = -b_0 \quad \wedge \quad 2a_0\left(c_0 + d_0\right) = 1$$

Bedingungen aus (2) Für mindestens ein n muss gelten:

$$a_n + b_n \neq 0$$

Da die Exponentialfunktionen eine Basis für den L^2 bilden, sollten zwei Summanden ausreichen, um auf die geforderten $\frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y)$ zu kommen. Diese Summanden seien die ersten beiden. Für den ersten Summanden erhalten wir folgende Bedingungen:

$$\left(a_0 + b_0\right)\frac{c_0}{2} = \frac{3}{4} \quad \wedge \quad c_0 = -d_0 \quad \wedge \quad \alpha_0 = 1$$

Sowie durch den zweiten Summanden:

$$\left(a_1 + b_1\right)\frac{c_1}{2} = -\frac{1}{4} \quad \wedge \quad c_1 = -d_1 \quad \wedge \quad \alpha_1 = 3$$

Bedingungen aus (3) Es muss für alle n gelten, dass:

$$\left(c_n e^{i\alpha_n \pi} + d_n e^{-i\alpha_n \pi}\right) = 0$$

Nur so ist gewährleistet, dass für alle x gerade 0 herauskommt. Dies können wir umformen zu:

$$-\frac{d_0}{c_0} = e^{2i\alpha_0 \pi}$$

Bedingungen aus (4) Analog zum vorherigen Abschnitt muss gelten für alle n gelten:

$$-\frac{b_0}{a_0} = e^{2\alpha_0 \pi}$$

Eventuell lässt sich auf diesem Wege die Koeffizienten so bestimmen, dass eine Lösung u herauskommt.

7.3 Randwertaufgaben

7.3a

Wir nehmen an, dass die Funktion u nur von r abhängt. Somit vereinfacht sich die Poissongleichung zu:

$$\begin{aligned}
\triangle u(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) &= r \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) &= r^3 \\
r^2 \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{4} r^4 + c_1 \\
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{4} r^2 + c_1 \frac{1}{r^2} \\
u &= \frac{1}{12} r^3 + c_2 \frac{1}{r} + c_3
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist allerdings bei $r = 0$ nicht differenzierbar, womit $c_2 = 0$ gelten muss. Ansonsten hätten wir auch eine Randbedingung zu wenig. Es bleibt die Randbedingung:

$$u(R) = \frac{1}{12}R^3 + c_3 = \pi R^3$$

Daraus leiten wir ab, dass $c_3 = \left(\pi - 1/12\right)R^3$ sein muss. Die Lösung lautet:

$$u(r) = \frac{1}{12}r^3 + \left(\pi - \frac{1}{12}\right)R^3$$

Wir machen die Probe und setzen u in die Poissongleichung ein:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4}r^2 \quad \overset{r^2}{\rightsquigarrow} \quad \frac{1}{4}r^4 \quad \overset{\frac{\partial}{\partial r}}{\rightsquigarrow} \quad r^3 \quad \overset{r^{-2}}{\rightsquigarrow} \quad r \quad \checkmark$$

Die Funktion löst also die Poissongleichung.

7.3b

Hier können wir analog vorgehen:

$$\begin{aligned}
\triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) &= 1 \\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) &= r^2 \\
r^2 \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{3}r^3 + c_1 \\
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{3}r + c_1 \frac{1}{r^2} \\
u &= \frac{1}{6}r^2 + c_2 \frac{1}{r} + c_3
\end{aligned}$$

Hier muss die Funktion nicht bei $r = 0$ differenzierbar sein, so dass $c_2 \neq 0$ zulässig ist. Daher brauchen wir auch zwei Randbedingungen, um beide Konstanten zu bestimmen. Mit $u(1) = 0$ und $u(4) = 0$ erhalten wir $c_2 = 10/3$ und $c_3 = -7/2$. Die Lösung ist also:

$$u(r) = \frac{1}{6}r^2 + \frac{10}{3}\frac{1}{r} - \frac{7}{2}$$