Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 6

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2012-11-19

Aufgabe	6.1	6.2	6.4	$\sum$
Punkte	3 / 3	3 / 3	6 / 6	12 / 12

6.4 Dirichletproblem

In Polarkoordinaten ist die Laplacegleichung:

$$\triangle u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Zur Separation wählen wir:

$$u(\rho, \phi) = v(\rho) w(\phi)$$

In die Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir nach einigen Umformungen:

etwas knapp...

$$\frac{w''}{w} = -\alpha^2 \quad \wedge \quad \rho^2 v'' + \rho v' - \alpha^2 v = 0$$

Die Gleichung in w können wir durch $w(\phi) = c_1 \cos(\alpha\phi) + c_2 \sin(\alpha\phi)$ lösen. Nun setzen wir wie auf dem Aufgabenzettel angegeben $p = \mathrm{e}^t$ für die Gleichung in ρ:

$$\mathrm{e}^{2t} v''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t v'\left(\mathrm{e}^t\right) - \alpha^2 v\left(\mathrm{e}^t\right) = 0$$

Wir führen eine neue Funktion $a(t) := v\left(\mathrm{e}^t\right)$ ein, deren zweite Ableitung $a''(t) = v''\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{2t} + v'\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^t$ ist. Damit können wir die Differentialgleichung vereinfachen zu:

$$a'' - \alpha^2 a = 0$$

Die Lösung davon sind Exponentialfunktionen, nach Rücksubstitution erhalten wir:

$$v(\rho) = c_3 \rho^\alpha + c_4 \rho^{-\alpha}$$

$(\alpha \in \mathbb{C})$ für $\alpha = 0$ erhalten wir $c_1 + c_2 \ln \rho$

Die Funktion u setzen wir aus beidem zusammen:

$$u(\rho, \phi) = \left(c_3 \rho^\alpha + c_4 \rho^{-\alpha}\right)\left(c_1 \cos(\alpha\phi) + c_2 \sin(\alpha\phi)\right) + c_5$$

$+ c_6 \ln \rho$

Wir wählen $c_5 = 3$. Damit bei $\rho = 1$ nur 3 herauskommt sowie bei $\rho = 3$ der Wert $3 + 3\cos(\phi)$, müssen wir $c_4 = 0$ wählen. Wir wählen $c_3 = 1$ und müssen nun noch folgende Gleochungen für c_1 und c_2 erfüllen:

$$c_1 + c_2 = 3, \quad 3c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 3$$

Damit erhalten wir $c_1 = 9/8$ und $c_2 = -9/8$. Die Lösung der Differentialgleichung ist also:

$$u(\rho, \phi) = \left(\frac{9}{8}r - \frac{9}{8}\frac{1}{r}\right)\cos(\phi) + 3$$

Wenn wir zur Kontrolle in diese Funktion $\rho = 1$ einsetzen, erhalten wir nur die 3. Setzen wir $\rho = 3$ ein, erhalten wir $(27/8 - 3/8)\cos(\phi) = 3\cos(\phi)$.

Einsetzen in die Laplacegleichung ergibt 0.

gut!

6/6

Aufgabe 6.1

z: $$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(k\varphi) = \frac{1-r\cos\varphi}{1+r^2-2r\cos\varphi}$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(k\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cdot \frac{1}{2}\left(e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\varphi} + \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{-ik\varphi}\right)$$ ✓

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(re^{i\varphi}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(re^{-i\varphi}\right)^k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(r(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^k\right)$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{l=0}^{\infty} p^l = \frac{1}{1-p} \qquad 0 < |p| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(r(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-r(\cos\varphi - i\sin\varphi)} + \frac{1}{1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r}\right)$$ ✓

$$= \left(\frac{1-r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + 1 - r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\left(1-r(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right)\left(1-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2-2r\cos\varphi}{1 \underbrace{-(r\cos\varphi + i\sin\varphi) - (r\cos\varphi - i\sin\varphi)}_{-2r\cos\varphi} + r^2\left(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1} + \underbrace{i\sin\varphi\cos\varphi - i\sin\varphi\cos\varphi}_{0}\right)}\right)$$ ✓

$$= \frac{1-r\cos\varphi}{1+r^2-2r\cos\varphi}$$ wzbw ✓

3/3

Aufgabe 6.2

Laut Satz aus der Vorlesung nimmt die Funktion ihr Maximum nur am Rand an.

Am Rand gilt: $x^2+y^2=4$ ~~oder~~

man sieht leicht, dass das Maximum von $u(x,y)=\frac{3}{2}y+1$ auf dem Rand bei $(0,2)$ liegen muss

$\Rightarrow \max(u) = u(0,2) = 4$ ✓

Der Funktionswert im Koordinaten-ursprung ist das arithmetische Mittel der Werte auf dem Rand:

$$u(0,0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial K} u \, ds = \cancel{\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{2}y+1\right)dy}$$

$$\cancel{= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}y^2+y\right)\Big|_{-2}^{2}} = 1$$

~~Das erste~~ ~~als~~ Integral ausrechnen?

Das arithmetische Mittel ist bei dieser linearen Funktion ist 1, weil der lineare Teil sich auf $y>0$ und $y<0$ gerade weghebt.

Gut!

Systematischer geht dies als 1-dim Mannigfaltigkeit mit $\varphi(t) = R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$. $U = (0, 2\pi)$

$D\varphi = R\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} \Rightarrow g = R^2 \Rightarrow \sqrt{g} = R$

Nullmenge $\{0, 2\pi\}$ beim Integral egal

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_0^{2\pi} dt \left(\frac{3}{2}R\cos t + 1\right) R$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\, 2\pi R = 1$$ ✓

3/3