Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 6

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	6.1	6.2	6.4	$\sum$
Punkte	/ 3	/ 3	/ 6	/ 12

6.4 Dirichletproblem

In Polarkoordinaten ist die Laplacegleichung:

$$\triangle u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Zur Separation wählen wir:

$$u(\rho, \phi) = v(\rho) w(\phi)$$

In die Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$\frac{w''}{w} = -\alpha^2 \quad \wedge \quad \rho^2 v'' + \rho v' - \alpha^2 v = 0$$

Die Gleichung in w können wir durch $w(\phi) = c_1 \cos(\alpha\phi) + c_2 \sin(\alpha\phi)$ lösen. Nun setzen wir wie auf dem Aufgabenzettel angegeben $p = \mathrm{e}^t$ für die Gleichung in ρ:

$$\mathrm{e}^{2t} v''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t v'\left(\mathrm{e}^t\right) - \alpha^2 v\left(\mathrm{e}^t\right) = 0$$

Wir führen eine neue Funktion $a(t) := v\left(\mathrm{e}^t\right)$ ein, deren zweite Ableitung $a''(t) = v''\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{2t} + v'\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^t$ ist. Damit können wir die Differentialgleichung vereinfachen zu:

$$a'' - \alpha^2 a = 0$$

Die Lösung davon sind Exponentialfunktionen, nach Rücksubstitution erhalten wir:

$$v(\rho) = c_3 \rho^\alpha + c_4 \rho^{-\alpha}$$

Die Funktion u setzen wir aus beidem zusammen:

$$u(\rho, \phi) = \left(c_3 \rho^\alpha + c_4 \rho^{-\alpha}\right)\left(c_1 \cos(\alpha\phi) + c_2 \sin(\alpha\phi)\right) + c_5$$

Wir wählen $c_5 = 3$. Damit bei $\rho = 1$ nur 3 herauskommt sowie bei $\rho = 3$ der Wert $3 + 3\cos\left(\phi\right)$, müssen wir $c_4 = 0$ wählen. Wir wählen $c_3 = 1$ und müssen nun noch folgende Gleochungen für c_1 und c_2 erfüllen:

$$c_1 + c_2 = 3, \quad 3c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 3$$

Damit erhalten wir $c_1 = 9/8$ und $c_2 = -9/8$. Die Lösung der Differentialgleichung ist also:

$$u(\rho, \phi) = \left(\frac{9}{8}r - \frac{9}{8}\frac{1}{r}\right)\cos\left(\phi\right) + 3$$

Wenn wir zur Kontrolle in diese Funktion $\rho = 1$ einsetzen, erhalten wir nur die 3. Setzen wir $\rho = 3$ ein, erhalten wir $\left(27/8 - 3/8\right)\cos\left(\phi\right) = 3\cos\left(\phi\right)$.

Einsetzen in die Laplacegleichung ergibt 0.