Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 5

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2012-11-12

Aufgabe	5.1	5.3	5.4	$\sum$
Punkte	4 / 4	4,5 / 5	5 / 6	13,5 / 15

5.1 Anfangswertaufgabe

In die Lösungsformel eingesetzt erhalten wir:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - y^2\right)$$

Ich führe ξ als neue Koordinate ein [1]:

$$\xi := \sqrt{\frac{1+4t}{4t}}\left(y - \frac{x}{1+4t}\right)$$

Nun können wir das negative Argument der Exponentialfunktion umschreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-y)^2}{4t} + y^2 &= \frac{(1+4t)y^2 - 2xy + x^2}{4t} \\
&= \frac{1+4t}{4t}\left(y^2 - \frac{2x}{1+4t}y + \frac{x^2}{1+4t}\right) \\
&= \frac{1+4t}{4t}\left(\left(y - \frac{x}{1+4t}\right)^2 + \frac{x^2}{1+4t} - \frac{x^2}{(1+4t)^2}\right) \\
&= \frac{1+4t}{4t}\left(\left(y - \frac{x}{1+4t}\right)^2 + \frac{4x^2t}{(1+4t)^2}\right) \\
&= \frac{1+4t}{4t}\left(y - \frac{x}{1+4t}\right)^2 + \frac{x^2}{1+4t} \\
&= \xi^2 + \frac{x^2}{1+4t} \quad ✓
\end{aligned}$$

Dies können wir nun in die Lösungsformel einsetzen und erhalten mit $\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{4t}{1+4t}}\mathrm{d}\xi$ und $\xi(\pm\infty) =$

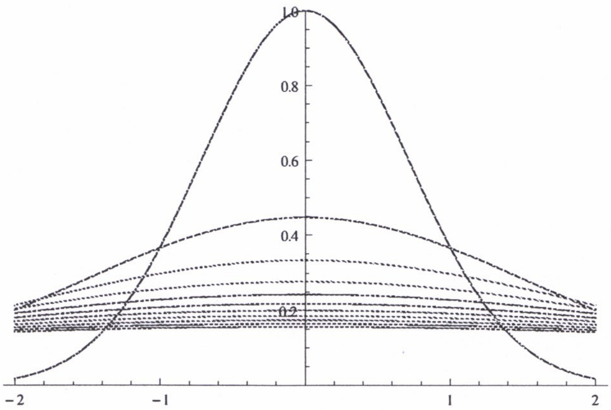

Abbildung 1: Plot von $u(x,t)$ für $t = 0,\dots,10$. Der höhste Graph ist $t = 0$.

$\pm\infty$:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - y^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sqrt{\frac{4t}{1+4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \exp\left(-\left(\xi^2 + \frac{x^2}{1+4t}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+4t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \exp\left(-\xi^2\right)
\end{aligned}
$$

Das Integral ist einfach nur $\sqrt{\pi}$, dies kann man durch Quadrieren und Wechsel in Polarkoordinaten bestimmen.

$$
= \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right)
$$

$t \to 0$

Für $t = 0$ kommt gerade e^{-x^2} heraus, wie gefordert. Die Funktion ist in Abbildung 1 gezeigt. 4/4

5.4 g fortsetzen

Wir schreiben $\dot{u} := \frac{\partial u}{\partial t}$ und $u'' := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

5.4a homogen, Dirichlet

Gegeben ist $\dot{u} = u''$ und $u(0,t) = 0$ sowie $u(x,0) = g(x)$.

Im Nullpunkt muss $u = 0$ gelten. Also setzen wir g ungerade fort:

$\rightsquigarrow$ ~~gleich~~ $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$$
\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ \underset{\downarrow 0}{-g(-x)} & \underset{x=0}{x < 0} \end{cases}
$$

Dies setzen wir in die Lösungsformel ein:

Um die Lösungsformel (Satz 9) zu benutzen, braucht man Stetigkeit von $\tilde{g}$, d.h. $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. (−1 P.)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \tilde{g}(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(-\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(-y) + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(y)\right)
\end{aligned}
$$

Mit $z := -y$ und $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}y$:

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_\infty^0 \mathrm{d}z \exp\left(-\frac{(x+z)^2}{4t}\right) g(z) + \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(y) \right)$$ ✓

Das hätte schon gereicht.

Wir kehren die Integralgrenzen um und fassen die Integrale zusammen.

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \left(-\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \right) g(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \left(-\exp\left(-\frac{2xy}{4t}\right) + \exp\left(\frac{2xy}{4t}\right) \right) g(y)$$

Dies ist gerade der doppelte sinh.

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \sinh\left(\frac{2xy}{4t}\right) g(y)$$ (✓)

1/2

5.4b homogen, Neumann

Diese Aufgabe ist ähnlich Aufgabe 5.4a, allerdings soll hier nicht $u(0,t) = 0$, sondern $u'(0,t) = 0$ gelten. Die Funktion g setzen wir daher gerade fort, damit die Steigung immer 0 bleibt:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Hier braucht man wieder Stetigkeit von $\tilde{g}$. Das ist hier äquivalent dazu, dass $\lim_{x \to 0} g(x)$ existiert.

Dies setzen wir auch in die Lösungsformel ein. Der einzige Unterschied zur 5.1 ist, dass ein Minuszeichen fehlt. Somit kommt nicht sinh sondern cosh am Ende heraus:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \cosh\left(\frac{2xy}{4t}\right) g(y)$$ ✓

2/2

5.4c inhomogen, Dirichlet

Gegeben ist $\dot{u} = u'' - u$ und $u(0,t) = 0$ sowie $u(x,0) = g(x)$. Als Ansatz soll $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t} v(x,t)$ benutzt werden.

Die Ableitungen von u sind:

$$u'' = \mathrm{e}^{-t} v'', \quad \dot{u} = -\mathrm{e}^{-t} v + \mathrm{e}^{-t} \dot{v}$$

Dies setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten:

$$-\mathrm{e}^{-t} v + \mathrm{e}^{-t} \dot{v} = \mathrm{e}^{-t} v'' - \mathrm{e}^{-t} v$$

Daraus folgt:

$$\dot{v} = v''$$ ✓

Somit muss v die normale Wärmeleitungsgleichung erfüllen. Außerdem soll $u(0,t) = 0$ erfüllt sein. Die ist äquivalent zu $v(0,t) = 0$. Aus $u(x,0) = g(x)$ können wir $v(x,0) = g(x)$ folgern. Somit haben wir das Problem auf die Aufgabe 5.4a zurückgeführt. Das u was wir dort erhalten haben, ist hier das v. Zusammen mit e^{-t} ergibt es die Lösung u.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-t} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \sinh\left(\frac{2xy}{4t}\right) g(y)$$ ✓

2/2

Literatur

[1] Mercy. Heat equation with initial value. http://math.stackexchange.com/a/234231/14291.

Gegeben ist folgendes Problem: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<1 \quad ,t>0$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = x^2 - 1$$

Separationsansatz:

$$u(x,t) = v(x)w(t)$$

$$\Rightarrow \quad w'(t)v(x) = w(t)v''(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v(x)}{v''(x)} = \frac{w(t)}{w'(t)} = C$$

$$\Rightarrow \quad Cv''(x) - v(x) = 0$$
$$\Rightarrow \quad v(x) = Ae^{-\sqrt{C}x} + Be^{\sqrt{C}x} \quad ✓$$

$$Cw'(t) - w(t) = 0$$
$$\Rightarrow \quad w(t) = De^{Ct} \quad ✓$$

Aufgrund der Randbedingungen muss gelten:

$$V(0) = V(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = -\pi^2 n^2 \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = E\sin(\pi n x)$$

} OK, das sind viele Schritte auf einmal...

Betrachte $u(x,t)$ nun als Superposition aller $V(x)w(t)$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\pi^2 n^2 t} E_n \sin(\pi n x)$$

setze Anfangsbedingung ein $\quad D_n E_n =: \chi_n$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \sin(\pi n x) \overset{!}{=} x^2 - 1$$

x^2-1 können wir auf dem Intervall $[0,1]$ als ungerade Fourierreihe betrachten:

$$x^2 - 1 = \sum_{n=1} B_n \sin(\pi n x) \; ✓ \qquad B_n = 2\int_0^1 dx\,(x^2-1)\sin(n\pi x) \; ✓ = \frac{-4-2n^2\pi^2+4(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

4,5/5

Damit ist unser $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2n^2\pi^2+2(-1)^n}{n^3\pi^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(n\pi x)$ (✓)