Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 5

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	5.1	5.3	5.4	$\sum$
Punkte	/ 4	/ 5	/ 6	/ 15

5.1 Anfangswertaufgabe

In die Lösungsformel eingesetzt erhalten wir:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - y^2\right)$$

Ich führe ξ als neue Koordinate ein [?]:

$$\xi := \sqrt{\frac{1+4t}{4t}} \left(y - \frac{x}{1+4t}\right)$$

Nun können wir das negative Argument der Exponentialfunktion umschreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-y)^2}{4t} + y^2 &= \frac{(1+4t)y^2 - 2xy + x^2}{4t} \\
&= \frac{1+4t}{4t} \left(y^2 - \frac{2x}{1+4t} y + \frac{x^2}{1+4t}\right) \\
&= \frac{1+4t}{4t} \left(\left(y - \frac{x}{1+4t}\right)^2 + \frac{x^2}{1+4t} - \frac{x^2}{(1+4t)^2}\right) \\
&= \frac{1+4t}{4t} \left(\left(y - \frac{x}{1+4t}\right)^2 + \frac{4x^2 t}{(1+4t)^2}\right) \\
&= \frac{1+4t}{4t} \left(y - \frac{x}{1+4t}\right)^2 + \frac{x^2}{1+4t} \\
&= \xi^2 + \frac{x^2}{1+4t}
\end{aligned}$$

Dies können wir nun in die Lösungsformel einsetzen und erhalten mit $\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{4t}{1+4t}}\,\mathrm{d}\xi$ und $\xi(\pm\infty) =$

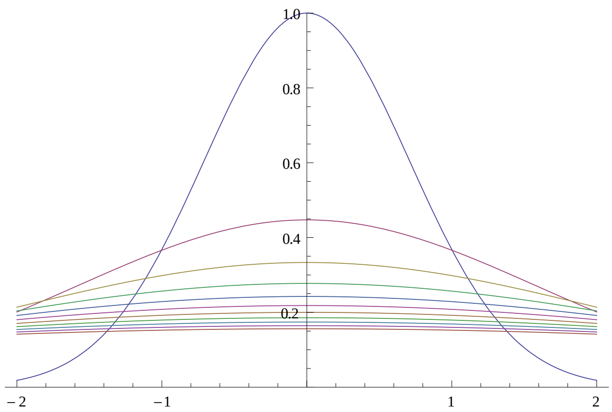

Abbildung 1: Plot von $u(x,t)$ für $t = 0, \dots, 10$. Der höhste Graph ist $t = 0$.

$\pm\infty$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - y^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sqrt{\frac{4t}{1+4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \exp\left(-\left(\xi^2 + \frac{x^2}{1+4t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+4t)}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \exp\left(-\xi^2\right) \end{aligned}$$

Das Integral ist einfach nur $\sqrt{\pi}$, dies kann man durch Quadrieren und Wechsel in Polarkoordinaten bestimmen.

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right)$$

Für $t = 0$ kommt gerade e^{-x^2} heraus, wie gefordert. Die Funktion ist in Abbildung 1 gezeigt.

5.4 g fortsetzen

Wir schreiben $\dot{u} := \frac{\partial u}{\partial t}$ und $u'' := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

5.4a homogen, Dirichlet

Gegeben ist $\dot{u} = u''$ und $u(0,t) = 0$ sowie $u(x,0) = g(x)$.

Im Nullpunkt muss $u = 0$ gelten. Also setzen wir g ungerade fort:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ -g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Dies setzen wir in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \tilde{g}(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(-\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(-y) + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(y)\right) \end{aligned}$$

Mit $z := -y$ und $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}y$:

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_{\infty}^{0} \mathrm{d}z \exp\left(-\frac{(x+z)^2}{4t}\right) g(z) + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(y) \right)$$

Wir kehren die Integralgrenzen um und fassen die Integrale zusammen.

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \left(-\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)\right) g(y)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \left(-\exp\left(-\frac{2xy}{4t}\right) + \exp\left(\frac{2xy}{4t}\right)\right) g(y)$$

Dies ist gerade der doppelte sinh.

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \sinh\left(\frac{2xy}{4t}\right) g(y)$$

5.4b homogen, Neumann

Diese Aufgabe ist ähnlich Aufgabe 5.4a, allerdings soll hier nicht $u(0,t) = 0$, sondern $u'(0,t) = 0$ gelten. Die Funktion g setzen wir daher gerade fort, damit die Steigung immer 0 bleibt:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Dies setzen wir auch in die Lösungsformel ein. Der einzige Unterschied zur 5.1 ist, dass ein Minuszeichen fehlt. Somit kommt nicht sinh sondern cosh am Ende heraus:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \cosh\left(\frac{2xy}{4t}\right) g(y)$$

5.4c inhomogen, Dirichlet

Gegeben ist $\dot{u} = u'' - u$ und $u(0,t) = 0$ sowie $u(x,0) = g(x)$. Als Ansatz soll $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t} v(x,t)$ benutzt werden.

Die Ableitungen von u sind:

$$u'' = \mathrm{e}^{-t} v'', \quad \dot{u} = -\mathrm{e}^{-t} v + \mathrm{e}^{-t} \dot{v}$$

Dies setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten:

$$-\mathrm{e}^{-t} v + \mathrm{e}^{-t} \dot{v} = \mathrm{e}^{-t} v'' - \mathrm{e}^{-t} v$$

Daraus folgt:

$$\dot{v} = v''$$

Somit muss v die normale Wärmeleitungsgleichung erfüllen. Außerdem soll $u(0,t) = 0$ erfüllt sein. Die ist äquivalent zu $v(0,t) = 0$. Aus $u(x,0) = g(x)$ können wir $v(x,0) = g(x)$ folgern. Somit haben wir das Problem auf die Aufgabe 5.4a zurückgeführt. Das u was wir dort erhalten haben, ist hier das v. Zusammen mit e^{-t} ergibt es die Lösung u.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-t} \int_0^\infty \mathrm{d}y \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \sinh\left(\frac{2xy}{4t}\right) g(y)$$