Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 4

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2012-11-06

Aufgabe	4.1	4.3	4.4	$\sum$
Punkte	8 / 8	1,5 / 2	8 / 8	~~18~~ 17,5 / 18

Ich schreibe wieder $\ddot{w} := \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

4.1 RAWA

Als Ansatz benute ich $u(x,y,t) = v(x,y)w(t)$. Dies setze ich in die Differentialgleichung ein:

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} w - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w + \frac{1}{c^2} v \ddot{w} = 0$$

Teilen durch vw ergibt:

$$\underbrace{-\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{=:\alpha} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{w}\ddot{w}}_{=:-\alpha} = 0$$

Daraus folgen die zwei Gleichungen, die unabhängig sind:

$$-v\alpha = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \wedge \quad -\alpha c^2 w = \ddot{w}$$ ✓

Falls α positiv ist, wird die Differentialgleichung für w durch Kosinus und Sinus gelöst. Ist $w = 0$, ist dies eine lineare Funktion. Falls $w < 0$, wird dies durch eine Exponentialfunktion gelöst. Mit den Randbedingungen kann allerdings α nur positiv sein. Daraus folgt für die Integralbasis für w:

$$B_w = \left\{\cos\left(\sqrt{\alpha} c t\right), \sin\left(\sqrt{\alpha} c t\right)\right\}$$ ✓

Nein, eigentlich nicht. Die Randbed. für w ergeben nur $w(0)=0$, daraus folgt nichts für α. Aus den Randbed. für G, H kann man aber $\alpha-\beta, \beta > 0$ herleiten, woraus $\alpha > 0$ folgt.

Für v setze ich nun GH ein und erhalte:

$$\frac{G''}{G} + \alpha = -\frac{H''}{H} =: \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{G''}{G} = -(\alpha - \beta), \quad \frac{H''}{H} = -\beta$$

Somit erhalte ich zwei weitere Gleichungen, die ich einfach unter Benutzung der gleichen Fallunterscheidung lösen kann. Ich erhalte als Integralbasen:

$$B_G = \left\{\cos\left(\sqrt{\alpha-\beta}\, x\right), \sin\left(\sqrt{\alpha-\beta}\, t\right)\right\}, \quad B_H = \left\{\cos\left(\sqrt{\beta}\, y\right), \sin\left(\sqrt{\beta}\, y\right)\right\}$$ ✓

Die Funktion u ist nun eine Linearkombination aus Produkten, die jeweils aus einer Basisfunktion bestehen. Da allerdings die Randbedingungen festlegen, dass am Rand die Funktion 0 sein soll, können nur Sinusterme vorkommen.

Außerdem muss dann $\sqrt{\alpha - \beta}a = m\pi$ und $\sqrt{\beta}b = n\pi$ $(m, n \in \mathbb{N})$ gelten, damit bei $x = a$, $y = b$ und $t = 0$ die Funktion ebenfalls 0 ist. Daraus folgt:

$$\beta = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \qquad \alpha = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

Somit muss also die Funktion sein:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cancel{a_m a_n}\, a_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}ct\right) \checkmark$$

Diese Funktion erfüllt für beliebige a_m und a_n die Anfangsbedingung für $u(x,y,0)$, und auch auch alle Randbedingungen.

Nun muss ich noch die a_m und a_n so wählen, dass die Bedingung für $\dot{u}$ erfüllt ist. Für $t = 0$ soll für $\dot{u}$ gelten:

$$\dot{u}(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_m a_n \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}c}_{C_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = xy(x-a)(y-b)$$

Das ist letztlich eine zweidimensionale Fourierreihe. Die Koeffizenten a_m und a_n können durch Projektion bestimmt werden.

Aus dem vorherigen Aufgabenblatt wissen wir für die Parabel, die ungerade fortgesetzt wird:

$$x(x-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a^2}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \checkmark$$

Somit können wir diese doppelte Parabel als Fourier-Reihe schreiben:

$$x(x-a)y(y-b) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{16a^2b^2}{\pi^6 m^3 n^3}\left((-1)^m - 1\right)\left((-1)^n - 1\right)}_{C_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \checkmark$$

Jetzt wählen wir die Vorfaktoren a_m und a_n einfach so, dass sie den Koeffizenten in der doppelten Parabel entsprechen.

Die generelle Lösung u ist also:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16a^2b^2}{\pi^6 m^3 n^3} \frac{\left((-1)^m - 1\right)\left((-1)^n - 1\right)}{\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}c} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}ct\right)$$

8/8

4.3 Laplacegleichung

Es soll bestimmt werden, für welche $\boldsymbol{a}$ folgende Gleichung durch $\phi\left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\rangle + ct\right)$ gelöst wird:

$$-\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Die Ableitungen der Funktion ϕ sind:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \ddot{\phi}\left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\rangle + ct\right)$$ ✓

Der Gradient:

$$\nabla \phi = \phi'\left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\rangle + ct\right) \boldsymbol{a}$$ ✓

Laplace:

$$\Delta \phi = \phi''\left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\rangle + ct\right) \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle$$ ✓

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich dann die Bedingung:

$$a^2 = 1$$ (✓) Warum kann nicht $\phi'' = 0$ sein?

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ müssen also normiert sein.

~~2~~ 1,5/2

4.4 Cauchy-Probleme

4.4b die Zweite

Ich benutze die Lösungsformel:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t} \mathrm{d}\tau_y \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t} \mathrm{d}\tau_y \frac{u_1(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}$$

Das Integral ist auf einer Einheitskreisfläche. Daher gilt: $\mathrm{d}\tau_y = \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$. Die Grenzen sind:

$$x_1 - t \le y_1 \le x_1 + t, \quad x_2 - \sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2} \le y_2 \le x_2 + \sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2}$$

Mit diesen Grenzen wird die Lösungsformel zu:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \mathrm{d}y_1 \int_{x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \mathrm{d}y_2 \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\right)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \mathrm{d}y_1 \int_{x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \mathrm{d}y_2 \frac{u_1(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}$$

Dort setze ich jetzt die Funktion ein:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \mathrm{d}y_1 \int_{x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \mathrm{d}y_2 \frac{y_1^2 + y_2^2}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\right)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \mathrm{d}y_1 \int_{x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \mathrm{d}y_2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}$$
$$= \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{3}\left(2t^2 + 3\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) + t$$

Diese Lösung erfüllt die Differentialgleichung und auch die Anfangsbedingungen.

Aufgabe 4.4 Paul Munz

Die Aufgabe ist etwas verwirrend, denn der „Ansatz" ist ja bereits eine vollständige Lösung, die höchstens noch vereinfacht werden könnte.

Zeige, dass der Ansatz ~~das~~ Cauchy-Problem löst: ← Gut!

$$u_t = \sum_k \left[\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \Delta^k u(x,0) + \frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k u_t(x,0) \right]$$

$$u_{tt} = \sum_k \left[\frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!} \Delta^k u(x,0) + \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \Delta^k u_t(x,0) \right] \quad (I)$$

$$\Delta u = \sum_k \left[\frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^{k+1} u(x,0) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^{k+1} u_t(x,0) \right]$$

substituiere in II $l := k-1$

$$\Rightarrow u_{tt} = \sum_l \frac{t^{2l}}{(2l)!} \Delta^{l+1} u(x,0) + \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} \Delta^{l+1} u_t(x,0) = \Delta u$$ womit die Wellengleichung erfüllt wäre. ✓

ich hoffe das stimmt überhaupt

Setzen wir beim Ansatz für $u(x,t)$ $t=0$, so fallen alle Terme außer jenem, wo $0^0=1$ steht:

$$u(x,0) = \frac{0^0}{0!} \Delta^0 u(x,0) = u(x,0)$$ damit stimmt die erste Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = \frac{0^0}{0!} \Delta^0 u_t(x,0) = u_t(x,0) \quad ✓$$

a)

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \left(e^{x_1} \cos(x_2)\right) + \underbrace{\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \left(x_1^2 - x_2^2\right)} \right]$$

diese Summe wird zu $t(x_1^2 - x_2^2)$, da $\Delta^1(x_1^2 - x_2^2) = 0$ und alle höheren Ableitungen verschwinden. ✓

$$\Delta^k u = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \frac{\partial^{2(k-n)}}{\partial x_1^{2(k-n)}} \frac{\partial^{2n}}{\partial x_2^{2n}} u$$

$$\Rightarrow \Delta^k \left(e^{x_1} \cos(x_2)\right) = e^{x_1} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-1)^n \cos(x_2) = \begin{cases} e^{x_1} \cos(x_2) & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ✓$$

$\Rightarrow \quad u(x,t) = e^{x_1}\cos(x_2) + t\,(x_1^2 - x_2^2)$

4/4

b)

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[\underbrace{\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,\Delta^k\,(x_1^2+x_2^2)}_{(x_1^2+x_2^2)+\cancel{4}t^2\cdot 2} + \underbrace{\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\Delta^k\,1}_{=t}\Bigg]$$

4/4

$u(x,t) = \cancel{4}\,2t^2 + t + x_1^2 + x_2^2$