Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 3

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	3.1	3.3	3.4	$\sum$
Punkte	/ 2	/ 6	/ 6	/ 14

3.1 Orthogonalitätsrelation

Es soll gezeigt werden, dass die Basisvektoren des L^2 linear unabhängig sind.

Sinus Für den Fall $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin(nx)\sin(mx) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \Big(\cos\big((n-m)x\big) - \cos\big((n+m)x\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin\big((n-m)x\big) - \frac{1}{n+m}\sin\big((n+m)x\big)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Für den Fall $m = n$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin^2(mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \frac{1-\cos(2nx)}{2} \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi\end{aligned}$$

Sinus und Kosinus Für den Fall $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin\big((m-n)x\big) + \sin\big((m+n)x\big) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\cos\big((m-n)x\big) + \frac{1}{m+n}\cos\big((m+n)x\big)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Für den Fall $m = n$ muss auf den ersten Summanden verzichtet werden. Der zweite Summand ist allerdings auch eigenständig 0, so dass die Relation auch dann gilt.

Kosinus Für den Fall $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \cos\big((m-n)x\big) + \cos\big((m+n)x\big) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin\big((m-n)x\big) + \frac{1}{m+n}\sin\big((m+n)x\big)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

Für den Fall $m = n$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, 1 + \cos(2mx) \\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2m}\sin(2mx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \pi\end{aligned}$$

3.3 duhamelsches Prinzip

Für ein Anfangswertproblem mit Störfunktion f ist die Lösung:

$$u(x,t) = \frac{a}{2}\int_0^t \mathrm{d}s \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \mathrm{d}y\, f(y,s)$$

3.3b Cauchy-Probleme

die erste Gelöst werden soll:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2}\sin(\omega x), \quad u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Dazu setze ich die Störfunktion ein und rechne das Integral aus:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{a}{2}\int_0^t \mathrm{d}s \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \mathrm{d}y\, \frac{1}{a^2}\sin(\omega y) \\ &= \frac{1}{2a^2\omega}\big(\sin(x+at) + \sin(x-at) - 2\sin(x)\big)\end{aligned}$$

Die Bedingungen $u(x,0) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ sind erfüllt.

die zweite Ich benutze $u'' := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\ddot{u} := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ als Abkürzungen.

Gelöst werden soll:

$$-u'' + \frac{1}{2^2}\ddot{u} = \frac{1}{2^2}\sin(x), \quad u(x,0) = \sin(x), \quad \dot{u}(x,0) = 0$$

Dazu löse ich die homogene Gleichung mit den Anfangsbedingungen mit der Formel aus [**?**, Seite 41]. Die Formel ist mit Anfangsbedingungen $u(x,0) =: u_0(x)$ und $\dot{u}(x,0) =: u_1(x)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(u_0(x+ct) + u_u(x-ct)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \mathrm{d}\xi\, u_1(\xi)$$

Die Lösung ist dann:

$$u_h(x,t) = \frac{1}{8}\big(\sin(x-2t) + \sin(x+2t)\big)$$

Nun löse ich noch die inhomogene Gleichung mit $u(x,0) = 0 \wedge \dot{u}(x,0) = 0$. Die Summe dieser Lösung und u_h erfüllen sowohl die Differentialgleichung (da diese linear ist) als auch die Anfangsbedingungen. Nach dem duhamelschen Prinzip ist die inhomogene Lösung:

$$u_p(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t \mathrm{d}s \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \mathrm{d}y \sin(y)$$

Dies ist aufgelöst:

$$u_p(x,t) = \frac{1}{8}\big(\sin(x-4t) - \sin(x-2t) - \sin(x) + \sin(x+2t)\big)$$

Die Lösung ist die Summe, also:

$$u(x,t) = \frac{1}{8}\big(\sin(x-4t) - \sin(x) + 2\sin(x+2t)\big)$$

Diese Funktion erfüllt die Anfangsbedingungen, allerdings kommt in die Differentialgleichung eingesetzt nicht ganz $\sin(x)$ heraus, sondern:

$$\sin(x) + \frac{1}{2}\left(-5\sin(x-4t) - \frac{9}{4}\sin(x+2t)\right)$$

die zweite zweite Gelöst werden soll:

$$-u'' + \frac{1}{9}\ddot{u} = \frac{1}{9}\sin(t), \quad u(x,0) = 1, \quad \dot{u}(x,0) = 1$$

Die Lösung des homogen Anfangswertproblem ist:

$$u_h(x,t) = 1 + t$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung mit $u(x,0) = 0 \wedge \dot{u}(x,0)$ ist:

$$u_p(x,t) = t\big(1 - \cos(t)\big) + 1 + t$$

Als Summe ergibt sich:

$$u(x,t) = 1 + 2t - t\cos(t)$$

Dies erfüllt die Anfangsbedingungen. In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt sich allerdings wie oben etwas anderes:

$$\sin(t) + t\cos(t) + \sin(t) \neq \sin(t)$$

3.4 Randanfangswertaufgaben

3.4a die Erste

In [?, Seite 43] wird dieser Lösungsansatz gegeben. Allerdings wird dort als Grenze π und nicht 1 genommen. Daher habe ich hier das π in der Funktion entfernt. Man kann das sicher *irgendwie* wieder reinbasteln ...

Als Ansatz wähle ich:

$$u(x,t) = \sum_n a_n(t) \sin(nx)$$

Dabei muss für jeden a_n in der Reihe auch die Differentialgleichung erfüllt sein. Somit gilt die gleiche, homogene, DGL ohne Randbedingungen auch für die Koeffizienten. Diese Differentialgleichung lässt sich zur eine Linearkombination von Kosinus und Sinus lösen. Somit sind die Koeffizienten:

$$a_n(t) = c_n \cos(nat) + d_n \sin(nat)$$

Die Koeffizenten kann ich nun durch Entwicklung der Anfangsbedingung $u_0(x) := u(x,0)$ nach Kosinus ermitteln:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathrm{d}x u_0(x) \cos(nx) = 0$$

Die Sinuskoeffizienten analog, allerdings $u_1(x) := \dot{u}(x,0)$:

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathrm{d}x \sin(2x) \sin(nx) = -\frac{4\sin(n\pi)}{cn\left(-4+n^2\right)\pi}$$

Die d_n sind 0 für alle n, außer für $n = 2$, dann ist es allerdings ein Grenzfall. Ich wende l'Hospital für n an. Dann erhalte ich den recht einfachen Ausdruck:

$$d_2 = -\frac{1}{2c}$$

Somit ist die Lösungsfunktion:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2c} \sin(2at) \sin(2x)$$

Die Funktion erfüllt die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen und die Randbedingungen.

3.4b die Zweite