Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 2

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Paul Manz

Lino Lemmer

2014-07-07

Aufgabe	2.1	2.2	2.3	2.5	Σ
Punkte	/ 4	/ 2	/ 4	/ 5	/ 15

2.1 Fourierreihe

2.1a Identität

Es soll die Fourierreihe von $f(x) = x$ bestimmt werden.

Wegen der Punktsymmetrie der Funktion f können nur Sinusterme vorkommen. Diese sind:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, x \sin(nx) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, \frac{1}{n} \cos(nx)}_{=0} \\ &= -\frac{2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist also:

$$S[f](x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

2.1b Betragsfunktion

Es soll die Fourierreihe von $f(x) = |x|$ bestimmt werden.

Wegen der Symmetrie kommen hier nur Kosinusterme (der konstante Term zählt dazu) vor. Diese sind:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |x| \cos(nx)$$

Da der Kosinus und die Betragsfunktion beide gerade sind, ist deren Produkt es auch. Ich kann also das Integral auf dem halben Interval doppelt nehmen:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x |x| \cos(nx) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x \frac{1}{n}\sin(nx) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)
\end{aligned}
$$

Außerdem für $n = 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x |x| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x x = \pi$$

Die Fourierreihe ist also:

$$S[f](x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx)$$

Der Ausdruck $\left((-1)^n - 1\right)$ ist nur für ungerade n von Null verschieden, so dass dies vereinfacht werden kann zu:

$$S[f](x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left((2n-1)x\right) \tag{1}$$

2.2 Reihe

2.2a Reihe

Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ich setze in (1) $x = 0$ ein. Somit werden alle Kosinusterme zu 1. Die Reihe ist dann:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

Dies kann ich umstellen zu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2.3 Fourierreihe einer Parabel

Sei $a > 0$. Es soll die Fourierreihe für $f : [0, a] \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x(x - a)$ bestimmt werden, wobei diese Funktion gerade und ungerade fortgesetzt werden soll.

Ich führe eine neue Koordinate τ ein, damit die Funktion genau 2π periodisch ist, und nicht $2a$ symmetrisch:

$$\tau := \frac{\pi}{a}x$$

Die Fourierreihe ist dann allerdings in τ und nicht in x.

2.3a gerade Fortsetzung

Die gerade Fortsetzung stelle ich mir wie in Abbildung 1 gezeigt vor.

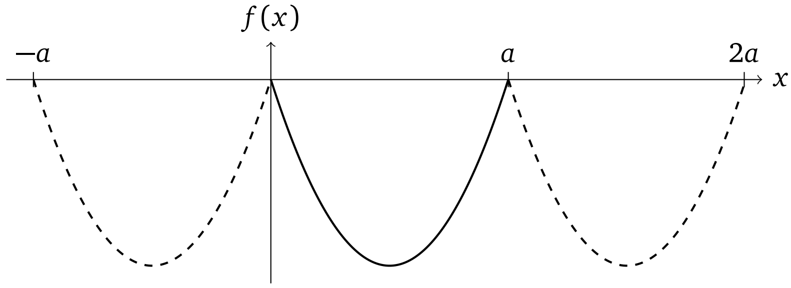

Abbildung 1: gerade Fortsetzung der Parabel

Wegen der Achsensymmetrie können hier nur gerade Terme vorkommen. Diese sind für $n > 0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\tau \left(\left(\frac{a}{\pi}\tau\right)^2 - \frac{a^2}{\pi}\tau\right)\cos(n\tau) \\
&= \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(n\tau)\left(\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 - \frac{a^2}{\pi}\tau\right)\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\tau 2\left(\frac{a^2}{\pi^2}\tau - \frac{a^2}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n\tau)\right) \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{a^2}{\pi^2}\tau - \frac{a^2}{\pi}\cos(n\tau)\right]_0^\pi + \underbrace{\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\tau \frac{a^2}{\pi^2}\cos(n\tau)}_{=0} \\
&= \frac{4a^2}{n^2\pi^2}\left[\frac{\tau}{\pi} - \cos(n\tau)\right]_0^\pi \\
&= \frac{4a^2}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

Und für $n = 0$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\tau \left(\left(\frac{a}{\pi}\tau\right)^2 - \frac{a^2}{\pi}\tau\right)\cos(0\tau) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\tau \left(\left(\frac{a}{\pi}\tau\right)^2 - \frac{a^2}{\pi}\tau\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\tau \left(\frac{a}{\pi}\tau\right)^2 - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\tau \frac{a^2}{\pi}\tau \\
&= \left[\frac{2a^2}{3\pi^3}\tau^3 - \frac{a^2}{\pi^2}\tau^2\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{3}a^2 - a^2 \\
&= -\frac{1}{3}a^2
\end{aligned}$$

Somit ist die Fourierreihe:

$$S[f](x) = -\frac{1}{3}a^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$$

2.3b ungerade Fortsetzung

Die ungerade Fortsetzung stelle ich mir wie in Abbildung 2 gezeigt vor.

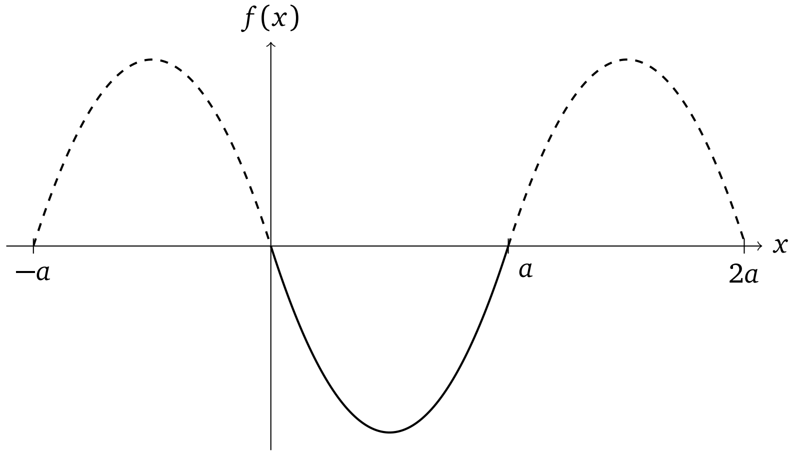

Abbildung 2: ungerade Fortsetzung der Parabel

Durch die Symmetrie können hier nur Sinusterme vorkommen. Die Vorfaktoren wären, wenn die Funktion schon periodisch wäre:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\tau \left(\left(\frac{a}{\pi}\tau\right)^2 - \frac{a^2}{\pi}\tau\right)\sin(n\tau)$$

Dabei sind die Integralgrenzen so nicht korrekt. Das Problem ist, dass außerhalb von $[0,\pi]$ die Parabel sich nicht wiederholt. Da die widerholte Parabel und der Sinus ungerade sind, kann ich einfach die Hälfte des Intervals nehmen und dafür das Integral verdoppelt. Nun ist es korrekt:

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}\tau \left(\left(\frac{a}{\pi}\tau\right)^2 - \frac{a^2}{\pi}\tau\right)\sin(n\tau)$$

Jetzt wende ich partielle Integration an.

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[\left(\left(\frac{a}{\pi}\tau\right)^2 - \frac{a^2}{\pi}\tau\right)\left(-\frac{1}{n}\cos(n\tau)\right)\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \mathrm{d}\tau \left(2\frac{a^2}{\pi^2}\tau - \frac{a^2}{\pi}\right)\left(-\frac{1}{n}\cos(n\tau)\right)\right)$$

Der erste Teil fiel weg. Nun wende ich erneut partielle Integration an.

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[\left(2\frac{a^2}{\pi^2}\tau - \frac{a^2}{\pi}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\sin(n\tau)\right)\right]_0^\pi}_{=0} - 2\int_0^\pi \mathrm{d}\tau \frac{a^2}{\pi^2 n^2}\left(\sin(n\tau)\right)\right)$$

$$= \frac{4a^2}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

Somit ist die Fourierreihe:

$$S[f](\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a^2}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$$

2.5 Fouriertransformation

2.5a Treppenfunktion

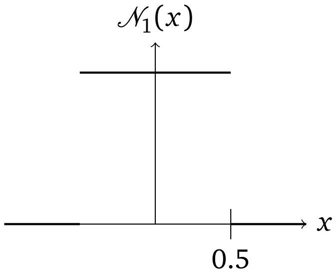

Abbildung 3: Treppenfunktion

Gegeben ist die Funktion $\mathcal{N}_1$ (Plot in Abbildung 3), deren Fouriertransformierte $\widehat{\mathcal{N}_1}$ berechnet werden soll:

$$\mathcal{N}_1(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Die Fouriertransformierte ist dann:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathcal{N}_1(x) \exp\left(-\mathrm{i}x\xi\right)$$

Dabei ist das Integral außerhalb von $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 0. Daher kann ich es auch schreiben als:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \exp\left(-\mathrm{i}x\xi\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\mathrm{i}}{\xi} \exp\left(-\mathrm{i}x\xi\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi} \sin\left(\frac{1}{2}\xi\right) \end{aligned}$$

2.5b Faltung

Berechnet werden soll die gefaltete Funktion $\mathcal{N}_2 := \mathcal{N}_1 * \mathcal{N}_1$. Außerdem soll die Fouriertransformierte dieser gefalteten Funktion berechnet werden.

Die gefaltete Funktion ist durch Geometrie zu bestimmen. Wenn die Funktionen genau überlappen, muss 1 herauskommen. Wenn das Zentrum der einen Funktion um mehr als ±1 vom Ursprung entfernt ist, muss 0 herauskommen. Dazwischen ist es linear in x. Ich erhalte:

$$\mathcal{N}_2(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 < x < 1 \\ 1 + x & -1 < x \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fouriertransformierte davon ist kann ich bestimmen, in dem ich die in Stücken gegebene Funktion wie oben in zwei Integrale aufteile und diese integriere. Als Ergebnis erhalte ich:

$$\widehat{\mathcal{N}_2} = \frac{2 - 2\cos\left(\xi\right)}{\sqrt{2\pi}\xi^2}$$

Eigentlich müsste gelten:

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 * \mathcal{N}_1, \quad \widehat{\mathcal{N}_2} = \widehat{\mathcal{N}_1}\widehat{\mathcal{N}_1}$$

Numerische Faltungen einer k-Dimensionalen Funktion (diskret mit n Datenpunkten), für eine Mustererkennung zum Beispiel, haben naiv implementiert eine Komplexität von $\mathcal{O}\left(n^{2k}\right)$. Die diskrete Fouriertransformation benötigt allerdings nur $\mathcal{O}\left(n^k \ln n\right)$. Die Multiplikation ist nur $\mathcal{O}(n^k)$ und somit zu vernachlässigen. Somit ist eine Faltung, die mit einer Fouriertransformation implementiert ist, deutlich effizienter. [**?**]