Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 1

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	1.1	1.2	1.3	Σ
Punkte	/ 4	/ 4	/ 2	/ 10

1.1 Differentialgleichungen

Ich gehe davon aus dass y' die Funktion $\frac{\partial y}{\partial x}(x)$ meint.

1.1a die Einfache

Dies geht mit der Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \exp\left(2x - y\right) \\
\mathrm{d}y \exp\left(y\right) &= \exp(2x)\,\mathrm{d}x \\
\int \mathrm{d}y \exp\left(y\right) &= \int \mathrm{d}x \exp(2x) \\
\exp\left(y\right) &= \frac{1}{2}\exp(2x) + c_1 \\
y &= \ln\left(\frac{1}{2}\exp(2x) + c_1\right)
\end{aligned}$$

1.1c die Schwere

Es sollen alle Lösungen zu folgender Differentialgleichung bestimmt werden:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4y = x^2 + 5\cos(2x)$$

Dieser Ansatz stammt aus [**?**, Seite 181].

Ich beginne damit, die homogene Differentialgleichung zu lösen. Diese ist einfach mit einem Exponentialansatz (oder hier im Realfall durch Kosinus und Sinus) gelöst. Die Integralbasis B für die homogene Gleichung ist:

$$B = \left\{\cos(2x), \sin(-2ix)\right\}$$

Nun muss ich noch eine partikuläre Lösung bestimmen. Dazu wähle ich den Ansatz der Variiation der Konstanten. Die Funktionen in der Basis bezeichne ich mit u_1 und u_2. Das Gleichungssystem ist:

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 u_1 + \dot{c}_2 u_2 &= 0\\ \dot{c}_1 \dot{u}_1 + \dot{c}_2 \dot{u}_2 &= x^2 + 5\cos(2x)\end{aligned}$$

Dort setze ich die beiden Basisfunktionen (und deren Ableitung) ein und löse mit dem Gaußalgorithmus:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos(2x) & \sin(2x) & 0\\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) & x^2+5\cos(2x)\end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \tan(2x) & 0\\ -1 & \cot(2x) & \frac{1}{2}\csc(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{pmatrix}\\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \tan(2x) & 0\\ 0 & \tan(2x)+\cot(2x) & \frac{1}{2}\csc(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ich fasse den Tangens und Kotangens zusammen:

$$\begin{aligned}&\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \tan(2x) & 0\\ 0 & \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}+\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} & \frac{1}{2}\csc(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{pmatrix}\\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \tan(2x) & 0\\ 0 & \frac{\sin^2(2x)+\cos^2(2x)}{\cos(2x)\sin(2x)} & \frac{1}{2}\csc(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

$$\begin{aligned}&\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \tan(2x) & 0\\ 0 & \sec(2x) & \frac{1}{2}\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{pmatrix}\\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \tan(2x) & 0\\ 0 & \tan(2x) & \frac{1}{2}\sin(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{pmatrix}\\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\sin(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\cos(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Jetzt integriere ich nach x, um c_1 zu erhalten:

$$\begin{aligned}\dot{c}_1 &= -\frac{1}{2}\sin(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\\ c_1 &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\,\sin(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\end{aligned}$$

Dieses Integral kann durch (mehrfache) partielle Integration gelöst werden.

$$= -\frac{1}{8}\left(\left(1-2x^2\right)\cos(2x)+2x\sin(2x)-5\cos^2(2x)\right)$$

Analog erhalte ich c_2:

$$\begin{aligned}\dot{c}_2 &= \frac{1}{2}\cos(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\\ c_2 &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\,\cos(2x)\left(x^2+5\cos(2x)\right)\\ c_2 &= \frac{1}{16}\left(2\left(2x^2-1\right)\sin(2x)+20x+5\sin(4x)+4x\cos(2x)\right)\end{aligned}$$

$$y_p(x) = c_1(x)\cos(2x) + c_2(x)\sin(2x)$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$y(x) = \left(c_1(x) + c_3\right)\cos(2x) + \left(c_2(x) + c_4\right)\sin(2x)$$

Oder mit allem eingesetzt:

$$\begin{aligned} y(x) = &\left(-\frac{1}{16}\left(\left(2-4x^2\right)\cos(2x) + 4x\sin(2x) - 10\cos^2(2x)\right) + c_3\right)\cos(2x) \\ &+ \left(\frac{1}{16}\left(2\left(2x^2-1\right)\sin(2x) + 20x + 5\sin(4x) + 4x\cos(2x)\right) + c_4\right)\sin(2x) \end{aligned}$$

Laut *Mathematica* ist die Lösung zu dieser Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y(x) = &\, c_4\sin(2x) + c_3\cos(2x) \\ &+ \frac{1}{16}\left(4x^2\sin^2(2x) + 4x^2\cos^2(2x) - 2\sin^2(2x)\right) \\ &+ \frac{1}{16}\left(20x\sin(2x) + 5\sin(2x)\sin(4x) + 10\cos^3(2x) - 2\cos^2(2x)\right) \end{aligned}$$

Es ist zwar etwas mühsam die jeweils passenden Terme zu finden, allerdings scheint meine Lösung zu stimmen.

1.2 Laplace-Operator

1.2a Polarkoordinaten

Gegeben ist eine Funktion:

$$U(r,\phi) := u\left(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\right)$$

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

Ich beginne mit $\frac{\partial U}{\partial r}$:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\phi) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\phi)$$

Dies leite ich noch einmal nach r ab. Dabei kann ich den Kosinus und Sinus jeweils vor die Ableitung ziehen, da diese nicht von r abhängen.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2(\phi)$$

Zuletzte bestimme ich $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\sin^2(\phi) - \frac{\partial u}{\partial x}r\cos(\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2(\phi) - r\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\phi)$$

Diese Teile setze ich jetzt ein und fasse Terme mit $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$ zusammen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2(\phi) \\
&\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\phi) \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2(\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x} r\cos(\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2(\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\phi) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&= \triangle u
\end{aligned}$$

Somit gilt die Relation.

1.3 harmonische Funktion

1.3a Überprüfung

Es ist zu zeigen, dass $f = \frac{1}{r}$ eine harmonische Funktion ist.

Ich bestimme die Ableitungen der Funktion f:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad \triangle f = \sum_i \left(-\frac{1}{2}\frac{2x_i}{r^3} x_i + \frac{1}{r} 1 \right) = 0$$

$\triangle f = 0$ gilt also.