Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 12
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

2. Juli 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	1 / 4	3.5 / 4	2 / 4	1 / 4	2 / 4	9.5 / 16

Aufgabe 1 partielle Integration

Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\oint_U (\partial_i f) g \,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} f g \nu_i \,\mathrm{d}S - \int_U f(\partial_i g) \,\mathrm{d}x$$

Dazu beginne ich mit dem Satz von Gauß über das Vektorfeld $\underline{fg}$ mit dem Gebiet U:

$$\oint_{\partial U} f g \nu \,\mathrm{d}S = \int_U \nabla(fg) \,\mathrm{d}x$$

kein Vektorfeld! $f, g: \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \to \underline{\mathbb{R}}$ (nicht $\mathbb{R}^n$)

Davon betrachte ich jetzt allerdings nur die i-te Komponente. Wegen der Linearität der Integrale und Ableitungen geht dies.

$$\oint_{\partial U} f g \nu_i \,\mathrm{d}S = \int_U \partial_i (fg) \,\mathrm{d}x$$

Auf der rechten Seite wende ich nun die Produktregel an.

$$\oint_{\partial U} f g \nu_i \,\mathrm{d}S = \int_U (\partial_i f) g \,\mathrm{d}x + \int_U f(\partial_i g) \,\mathrm{d}x$$

Nun vertausche ich noch die Seiten und erhalte den gesuchten Ausdruck.

$$\int_U (\partial_i f) g \,\mathrm{d}x = \oint_{\partial U} f g \nu_i \,\mathrm{d}S - \int_U f(\partial_i g) \,\mathrm{d}x$$

Dies ist die Rechenregel für die partielle Integration im höherdimensionalen. (✓) 1/4

Aufgabe 2 Divergenz

Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\nabla F(x) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \oint_{\partial B(x,\epsilon)} F \cdot \nu \,\mathrm{d}S$$

Ich gehe davon aus, dass ich den Satz von Gauß benutzen darf. Dann kann ich das Integral umschreiben zu:

$$\nabla \cdot F(x) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} \nabla \cdot F \, \mathrm{d}V$$

richtig, dass du $\nabla \cdot F$ schreibst, weil es sonst aussieht wie ein Gradient (was hier keinen Sinn macht)

Das sieht dem verschwindenden Würfelintegral vom letzten Zettel sehr ähnlich. Ich schreibe das Volumenintegral aus. Dabei müssen die Grenzen natürlich in den inneren Integralen so gesetzt werden, dass nur über B integriert wird.

$$= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int \dots \int \nabla F \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

warum? → Stetigkeit! (FF vom letzten Zettel)

Da hier das Volumen immer kleiner wird, kann ich das Vektorfeld F einfach in nullter Näherung durch $F(x)$ ersetzen. Die Integrale werden dann eine triviale Multiplikation mit dem Volumen, so wie im letzten Zettel auch.

$$= \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \nabla F(x) |B(x,\epsilon)|$$

Das ∇ ziehe ich, weil F stetig ist, vor den Ausdruck.

$$= \nabla F(x)$$

Die rechte Seite ist also wirklich die Divergenz.

3,5 / 4

Aufgabe 3 Produktregel

Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\int_U f \vec{\nabla}^2 g + \nabla f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}x = \int f \partial_\nu g \, \mathrm{d}S$$

Dabei ist beim rechten Integral gar nicht angegeben, worüber integriert werden soll. Da $\mathrm{d}S$ eine Fläche suggeriert, gehe ich mal davon aus, dass über ∂U integriert werden soll. ✓

Ich fasse $\partial_\nu g$ als einen Vektor auf, letztlich wie folgt. Dieser Vektor ist dann einfach der Gradient von g.

$$\partial_\nu g = \begin{pmatrix} \partial_{\nu_1} g \\ \vdots \\ \partial_{\nu_n} g \end{pmatrix} = \nabla g$$

$\partial_\nu g$ ist die Richtungsableitung von in Richtung ν (vgl. z.B. ÜB 5 Aufg. 2), also $\partial_\nu g = \langle \nabla g, \nu \rangle$

Also kann ich $\partial_\nu g$ umschreiben:

$$\oint_{\partial U} f \partial_\nu g \, \mathrm{d}S = \oint_{\partial U} f \nabla g \, \mathrm{d}S$$

hier stünde jetzt entsprechend $\langle f \nabla g, \nu \rangle$ und dann könntest du den Satz von Gauss auch tatsächlich anwenden ☺

Ich wende jetzt den Satz von Gauß an.

$$= \int_U \nabla (f \nabla g) \, \mathrm{d}V$$

An dieser Stelle benutze ich die Produktregel.

$$= \int_U f \vec{\nabla}^2 g + \nabla f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}V$$

2 / 4

Dies ist genau der gesuchte Ausdruck.

Aufgabe 4 Leibnitz-Formel

Mir ist hier nicht ganz klar, wie ich $a_{\sigma(j),j}$ interpretieren soll. Unten in der Aufgabenstellung wird eine Ebene von $a_2, ...a_n$ aufgespannt und eine Matrix mit a_j als Spalten aufgebaut. Also sind die a_j wohl Vektoren. Dann könnte $a_{i,j}$ jetzt als die j-te Komponente des i-ten Vektors aus der Vektormenge a interpretieren. Wenn jetzt allerdings $a_{1,j}$ der j-te Einheitsvektor sein soll, dann beißt sich das irgendwie mit dem Rest. Aber hast du genau richtig verstanden ☺

Die Funktion n_0 soll ja einen Vektor zurückliefern. Wenn jetzt $a_{\sigma(j),j)}$ ein Skalar ist, dann kann das Produkt davon nur wieder ein Skalar sein. Wenn es ein Vektor ist, und das Produkt ein Skalarprodukt ist, dann kommt nur ein Vektor raus, wenn n ungerade ist. Das kann es also auch nicht sein. Wenn das Produkt ein Vektorprodukt (Kreuzprodukt) ist, dann käme am Ende wirklich ein Vektor raus. Ist das so gemeint? nein → siehe Übung

← für das fast richtig verstehen der Aufgabenstellung ☺
1/4

Aufgabe 5 Diffeomorphismus und Mannigfaltigkeit

Gegeben ist f als Diffeomorphismus. Dies bedeutet:

- f ist bijektiv.
- f ist stetig differenzierbar.
- f^{-1} ist stetig differenzierbar.

Außerdem ist die k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M gegeben. Dies bedeutet, dass es einen Atlas $(\phi_i)_i$ gibt. Außerdem ist jeder Punkt auf der Untermannigfaltigkeit von der Trägermenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ erreichbar.

$$\forall x \in M : \exists U \subseteq \mathbb{R}^k : \exists V \subseteq M : x \in V \wedge \exists \phi \colon U \mapsto V$$

↑ die ϕs müssen auch homöomorph und Immers. sein!

Es soll gezeigt werden, dass $\bar{M}$ eine auch eine Untermannigfaltigkeit ist. Es ist also zu zeigen, dass jeder Punkt aus dieser Untermannigfaltigkeit erreichbar ist.

$$\forall f(x) \in \bar{M} : \exists \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^k : \exists \bar{V} \subseteq \bar{M} : f(x) \in \bar{V} \wedge \exists \phi \colon \bar{U} \mapsto \bar{V}$$

Dadurch, dass f bijektiv ist, kann ich einfach von jedem Punkt von M zu $\bar{M}$ abbilden. Und da M eine Mannigfaltigkeit ist, existiert auch ein entsprechender Atlas, der in Kombination mit f direkt auf $\bar{M}$ abbildet.

Es bleibt noch zu zeigen, dass Df ein Isomorphismus von $T_x(M)$ auf $T_{f(x)}(\bar{M})$. Nach Lemma 4.12 aus der Vorlesung wird $T_{\phi(x)}$ aus den Spalten der Matrix $D\phi(x)$ erzeugt. Somit kann ich mit einem $u \in U$ aus der Trägermenge U meinen Punkt x schreiben als $x = \phi(u)$. Somit kann ich die Aussage des Lemmas schreiben als:

$$T_{\phi(u)}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(D\phi(x) \right)_i$$

Dabei sind a_i beliebige Konstanten aus $\mathbb{R}$, die die Linearkombination erzeugen.

Nun wende ich die Funktion f auf den Punkt x an. Somit erhalte ich:

$$T_{f(\phi(u))}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(D(f \circ \phi)(x) \right)_i$$

Nun wende ich die Kettenregel an, um die Ableitung rechts aufzulösen.

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left((Df \circ \phi)(x) \cdot D\phi(x) \right)_i$$

$$= D\phi(x) \sum_{i=1}^{n} a_i \left((Df \circ \phi)(x) \right)_i$$

?

Das war allerdings gerade der Tangentialvektorraum an der Stelle x.

$$T_{f(x)}\left(\bar{M}\right) = D\phi(x) T_x$$

?

2/4