Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 11
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

27. Juni 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 16

Aufgabe 1 Würfelintegral

Es soll gezeigt werden, dass f zu g identisch ist, wenn für alle Würfel gilt:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Ich beginne mit einem speziellen Würfel, einem, der um x zentriert ist und die Kantenlänge r hat. Diesen bezeichne ich als $W(x,r)$. Ich bilde folgendes Integral und schreibe es in den einzelnen Dimensionen des Würfels.

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{W(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \dots \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} f(y_1,\dots,y_n)\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$$

Da $r \to 0$ gilt, kann ich das Integral nähern. Die Funktion f ist in nullter Näherung eine Konstante. Somit vereinfacht sich das Integral zu:

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \dots \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} f(x)\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$$

Die Integrale sind jetzt trivial, es kommt in jedem Integral einfach $f(x)r$ heraus.

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} f(x) r^n$$
$$= f(x)$$

Wenn die Integrale von g und f über jeden Würfel gleich sind, sind sie auch über alle verschwindenden Würfel gleich. Somit gilt für $x \in Q$:

$$f(x) = g(x)$$

Somit muss $f \equiv g$ gelten.

Aufgabe 2 Kugelschale

Es soll gezeigt werden, dass die S^n Kugelschale eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ ist. Dabei soll ein Atlas angegeben werden.

Um dies zu zeigen, muss ich zeigen, dass es zu jedem Punkt eine Immersion gibt, sodass diese von der Karte, welche eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ sein muss, auf eine offene Menge um den Punkt herum abbildet.

Da die Kugel nicht die gleiche Topologie wie eine Ebene hat, kann ich keinen Atlas mit nur einer Karte angeben. Ich betrachte also Karten, die jeweils fast eine Halbkugel abdecken. Wenn ich davon ausreichend viele (für $n = 2$ reichen 4, für $n = 3$ reichen 6, also für n dann $2n$) angebe, habe ich einen endlichen Atlas für S^n.

Die Karte funktioniert so, dass ich die Kugel im Mittelpunkt durch eine Hyperebene H_i schneide, für die gilt:

$$H_i = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \wedge x_i = 0\}$$

Von jedem Punkt der Hyperebene komme ich zu der Hemisphäre, indem ich einfach einfach so lange x_i erhöhe, bis $|x| = 1$ erreicht ist. Das ganze habe ich in Abbildung Aufgabe 2 für den einfachen Fall $n = 2$ skizziert.

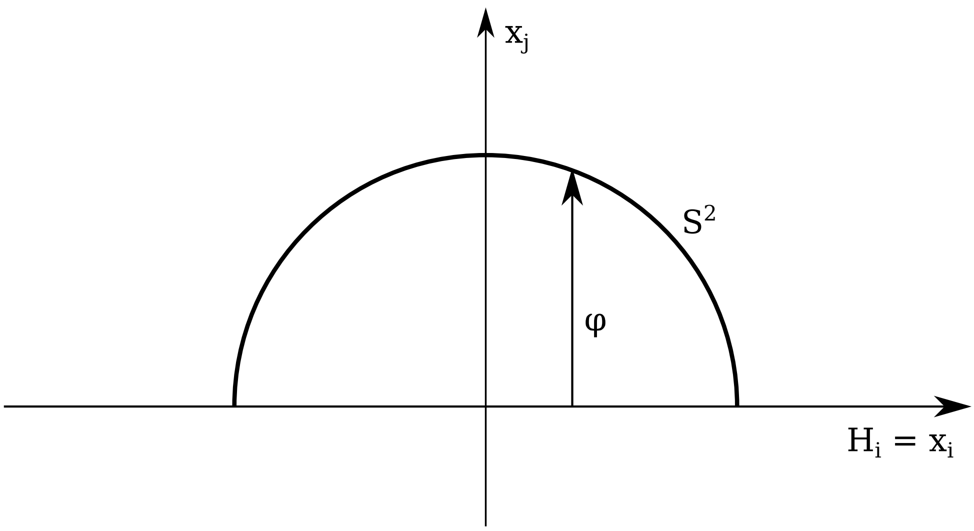

Abbildung 1: ϕ und H_i für den Fall $n = 2$

Aus diesen Karten kann dann die ganze Kugelschale zusammengebaut werden. Somit ist M eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 3 Integral über Nullmenge

Gegeben ist ein Integral

$$\int_M f \, \mathrm{d}S,$$

wobei f nur auf N ungleich 0 ist. Somit kann ich das Integral auch schreiben als:

$$\int_N f \, \mathrm{d}S$$

Nun ist ein Atlas $(\phi_i)_{i\in I}$ gegeben. Die Menge N kann ich so zerlegen, dass ich mit mehreren Karten die komplette Menge N abgedeckt bekomme. Wenn ich alle Karten zusammen nehme, habe ich ich N teilweise mehrfach abgedeckt, aber das ist in diesem Fall gar nicht weiter schlimm.

Ich transformiere jetzt das Integral auf die Definitionsbereiche der Karten und erhalte:

$$\int_N f \,\mathrm{d}S = \sum_i \int_{\phi_i^{-1}(N)} f\sqrt{g}\,\mathrm{d}S$$

Nun schätze ich den Integranden nach oben ab, indem ich einfach den extremsten Wert nehme, den der Integrand annehmen kann.

$$\leq \sum_i \int_{\phi_i^{-1}(N)} \sup_{x\in\phi_i^{-1}(N)} \left| f(x)\sqrt{g(x)}\right| \,\mathrm{d}S$$

Das Integral ist jetzt trivial und kann einfach als Produkt geschrieben werden.

$$= \sum_i \sup_{x\in\phi_i^{-1}(N)} \left| f(x)\sqrt{g(x)}\right| \underbrace{\left|\phi_i^{-1}(N)\right|}_{=0}$$

Dadurch, dass f Riemann-integrierbar ist, muss das Supremum einen endlichen Wert haben. Da allerdings N eine Nullmenge ist, ist der zweite Faktor einfach gleich 0. Somit ist das ganze Integral (und somit die Summe über diese) auch 0.

$$= 0$$

Aufgabe 4 Kreisring

Die Mannigfaltigkeit S^1 ist einfach der Einheitskreisring. Wenn ich aus diesem Kreis einen Punkt (der für sich eine Nullmenge ist) herausnehme, dann kann ich leicht eine Bijektion auf ein Intervall angeben. Dies ist dann auch direkt meine Karte:

$$[0,1) \mapsto S^1 \colon \phi(t) = \begin{pmatrix}\cos(2\pi t)\\ \sin(2\pi t)\end{pmatrix}$$

Nun bestimme ich $D\phi$:

$$D\phi = 2\pi \begin{pmatrix}-\sin(2\pi t)\\ \cos(2\pi t)\end{pmatrix}$$

Diesen Vektor skalar mit sich selbst multipliziert gibt mir die Gramsche Determinante:

$$(D\phi)^T D\phi = g = 4\pi^2$$

Nun kann ich das Integral umschreiben:

$$\begin{aligned}\int_{S^1} f\,\mathrm{d}S &= 2\pi \int_0^1 f(\phi(t))\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_0^1 (2\pi t)^5 + \arccos(\sin(2\pi t))^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3}\pi\left(\pi^2 + 16\pi^5\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 5 Zylindermantel

Um zu zeigen, dass es eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, brauche ich wieder einen Atlas. Dabei sind meine beiden Karten (ich muss den Zylindermantel bei $\phi = 0$ aufschneiden):

$$U_1 = [0, h] \times [0, 2\pi)$$
$$U_2 = [0, h] \times (0, 2\pi]$$

Die Immersion ist auf beiden Karten die gleiche:

$$\phi(z, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

Ich bestimme zuerst die Jakobimatrix zu der Immersion:

$$D\phi = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) & 0 \\ r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus bilde ich die Gramsche Determinante:

$$g = r^2$$

Das Integral kann ich nun ausführen:

$$\int_M \mathrm{d}S = \int_0^h \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z = 2\pi r h$$