Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 10
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

21. Juni 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 16

Aufgabe 1 Kegel

Es ist zu zeigen, dass das Volumen nicht von s_1 und s_2 abhängt. Das Volumen ist einfach das Integral über die charakteristische Funktion über dem kompletten Raum:

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \chi \, \mathrm{d}V$$

Nun zerlege ich das Volumen in Scheiben entlang der Höhe. Die Fläche einer solchen Scheibe bezeichne ich mit $A(h)$.

$$= \int_0^h A(h) \, \mathrm{d}z$$

Die Fläche ist ein einfacher Kreis, sodass ich jetzt für jede Kreisfläche Polarkoordinaten benutze.

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r\left(1-\frac{z}{h}\right)} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z$$

Die inneren Integrale führe ich aus:

$$= \pi \int_0^h \left[r^2\right]_0^{r\left(1-\frac{z}{h}\right)} \, \mathrm{d}z$$
$$= \pi r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \, \mathrm{d}z$$

Nun kann ich ausmultiplizieren und Integrieren. Nach dem Einsetzen der Grenzen erhalte ich:

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Und wie gefordert taucht die Position der Spitze (außer der Höhe) gar nicht mehr in der Formel auf.

Aufgabe 2 Quadervolumen

Da f Lipschitz-stetig ist, gilt:

$$\forall x, y, x \neq y \colon \frac{\|f(x) - f(y)\|_\infty}{\|x - y\|_\infty} \leq K_\infty \tag{1}$$

Das Volumen der Überdeckung $\mathcal{Q}$ ist das Volumen der Teile zusammen, also:

$$V(\mathcal{Q}) = \sum_{i \in I} V(Q_i)$$

Es ist zu zeigen, dass dieses Volumen kleiner (oder gleich) $2^n K_\infty^m V(Q)$ ist, das Volumen also maximal um $2^n K_\infty^m$ gestreckt wird.

Aufgabe 3 Operator-Norm

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \leq K \leq \max_{a \in A} \|Df(a)\| \tag{2}$$

Die Differenz im Zähler von (2) kann ich als Integral schreiben:

$$f(x) - f(y) = \int_y^x Df(z) \, \mathrm{d}z \tag{3}$$

Dabei interpretiere ich das als Linienintegral entlang der Linie von x bis y. Somit kann ich (2) umschreiben zu:

$$\frac{\left\| \int_y^x Df(z) \, \mathrm{d}z \right\|}{\|x - y\|}$$

Nun verwende ich die in der Aufgabenstellung gegebene Ungleichung und erhalte:

$$\frac{\left\| \int_y^x Df(z) \, \mathrm{d}z \right\|}{\|x - y\|} \leq \frac{\int_y^x \|Df(z)\| \, \mathrm{d}z}{\|x - y\|}$$

Das Integral schaue ich mir jetzt noch ein wenig genauer an. Das Integral über z ist letztlich ein Linienintegral entlang der Linie von x und y. Da die Trägermenge A konvex ist, sind praktischerweise alle Punkte auf dieser Linie auch im Definitionsbereich und ich kann das Integral über z umschreiben zu einem Integral über λ, indem ich z ersetze durch:

$$z(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda) y, \quad \lambda \in [0, 1]$$

Somit wird das Integral zu:

$$\int_0^1 \|Df(\lambda x + (1 - \lambda) y)\| \|x - y\| \, \mathrm{d}\lambda$$

Dies setzte ich nun in den Bruch wieder ein und erhalte:

$$\frac{\int_0^1 \|Df(\lambda x + (1 - \lambda) y)\| \|x - y\| \, \mathrm{d}\lambda}{\|x - y\|} = \int_0^1 \|Df(\lambda x + (1 - \lambda) y)\| \, \mathrm{d}\lambda$$

Das Integral ist die Fläche zwischen Kurve und λ-Achse. Dabei wird über eine nicht-negative Zahl integriert. Die Fläche ist größer (oder gleich), wenn ich nicht über $Df(\lambda)$ integriere, sondern über den Maximalwert. Somit erhalte ich:

$$\int_0^1 \|Df(\lambda x + (1-\lambda)y)\| \, \mathrm{d}\lambda \leq \max_{a \in A} \|Df(a)\|$$

Dies ist genau (2), das gezeigt werden sollte.

Aufgabe 4 diverse Lemmata

Aufgabe 4.a Lemma 3.24

Das Lemma 3.24 aus der Vorlesung lautet:

> Sei $p \leq q$, $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\Phi\colon U \mapsto \mathbb{R}^q$ Libschitz-stetig. Ist $N \subseteq U$ eine kompakte Jordansche Nullmenge, so ist auch $\Phi[N]$ eine Jordansche Nullmenge.

Da N eine kompakte Menge ist, kann ich eine endliche Überdeckung finden. Diese Überdeckung nenne ich $\mathcal{U}$.

Gegeben ist auch, dass Φ Libschitz-stetig ist. Zusammen mit der endlichen Überdeckung $\mathcal{U}$ weiß ich, dass eine obere Schranke für das Volumen $|\Phi[N]|$ in Abhängigkeit von $|N|$ gibt. Da N eine Nullmenge ist, ist auch $\Phi[N]$ eine Nullmenge.

Aufgabe 4.b Lemma 3.25

Das Lemma 3.25 aus der Vorlesung lautet:

> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\Phi\colon U \mapsto \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $\epsilon > 0$, sodass $\overline{B(x,\epsilon)} \subseteq U$ gilt. Dann ist Φ auf $\overline{B(x,\epsilon)} \subseteq U$ Libschitz-stetig.

Dabei kann niemals der Fall $\overline{B(x,\epsilon)} = U$ eintreffen, da $\overline{B}$ abgeschlossen und U offen ist. Es kann also maximal $\overline{B(x,\epsilon)} \subset U$ gelten.

Ich weiß also, dass Φ stetig differenzierbar ist. Somit muss Φ selbst auch stetig sein. Da $\overline{B}$ kompakt ist, ist Φ auf $\overline{B}$ beschränkt. Eine beschränkte Funktion auf einem kompakten Intervall ist auch direkt gleichmäßig stetig. Somit gilt das ϵ-δ-Kriterium für die gleichmäßige Stetigkeit:

$$\forall \epsilon > 0\colon \exists \delta\colon \forall x, y \in \overline{B}\colon \; (|x-y| < \delta \Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(y)| < \epsilon)$$

Die Funktion muss also eine ϵ-δ-Box immer links und rechts schneiden, niemals oben oder unten. Die Steigung der Funktion innerhalb der Box muss also kleiner sein als eine Diagonale, die durch die linke untere und rechte obere Ecke geht. Die Steigung dieser Diagonalen ist gerade gegeben durch $\frac{\epsilon}{\delta}$. Die durchschnittliche Steigung der Funktion ist einfach der Differenzenquotient:

$$\frac{|\Phi(x) - \Phi(y)|}{|x-y|} < \frac{\epsilon}{\delta}$$

Nun identifiziere ich einfach $K := \frac{\epsilon}{\delta}$ und habe sogar noch ein leicht stärkeres Kriterium als die Lipschitz-Stetigkeit.

Aufgabe 4.c Lemma 3.26

Aufgabe 5 Jakobi-Determinante

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$D[g(f(x))] = D[f(x)]^{-1} \tag{4}$$

Die ist die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, nur jetzt im Höherdimensionalen. Die Funktion $g(y)$ $(y \in V)$ ist letztlich f^{-1}, also die Umkehrfunktion zu f. Mit der Kettenregel kann ich $D[g(f(x))]$ umschreiben zu:

$$D[g(f(x))] = Dg(y)Df(x)$$

Aus (4) kann ich umformen:

$$Dg(y)Df(x)Df(x) = 1$$