Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 9
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

13. Juni 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	3 / 4	3,5 / 4	2 / 4	4 / 4	– / 4	12,5 / 16

schön!

!!!

Aufgabe 1 Cantor-Menge

$T_\epsilon(I)$ ist letztlich das (maximal abgeschlossene) Interval I nur ohne einen ϵ-Ball in der Mitte. Somit ist es die Vereinigung von zwei kompakten Intervallen.

Die Vereinigung

$$\bigcup_{I \in M_{n-1}} T_{2^{-2n-1}}(I)$$

ist wieder ein fraktales Gebilde. Aus allen Teilintervallen wird nun wieder ein Stück herausgeschnitten, allerdings ein immer kleineres Stück.

Zur Veranschaulichung des Problems habe ich ein kleines Programm in Python geschrieben. Dies in ab Seite 4 mit Ausgabe abgedruckt.

Die Menge $\mathcal{C}$ ist der Durchschnitt aller $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also in diesem Fall das letzte M_n in der Folge. Somit brauche ich nur $\lim_{n\to\infty} M_n$ für $\mathcal{C}$ zu betrachten.

!!! es gibt kein letztes

Eine Menge ist genau denn Jordan-messbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ integrierbar ist. Und dass ist sie genau dann, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. Die Unstetigkeiten von χ treten an den Randpunkten der $I \in M$ auf.

Es ist leicht zu sehen, dass die Intervalle I in jedem Iterationsschritt mehr oder weniger halbiert werden. Das ϵ, das in der Mitte herausgeschnitten wird, wird auch in jedem Schritt halbiert. Von daher wird kein Interval komplett weggeschnitten. Ich kann also sagen, dass die Intervalle sich niemals überlappen und sich deren Anzahl in jedem Schritt verdoppelt.

Die Menge der Randpunkte ist für $n = 0$ gegeben durch $R_0 = \{0, 1\}$. Diese Menge ist eine Nullmenge. In jedem Iterationsschritt verdoppelt sich die Menge der Randpunkte, es gilt also:

$$|R_n| = 2\,|R_{n-1}|$$

Eine endliche Kardinalität verdoppelt ist immer noch endlich. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist also jedes n gegeben, dass $|R_n| \leq \aleph_0$ gilt, also R_n eine Nullmenge ist. Eine endliche Vereinigung von Nullmengen ist immer noch eine Nullmenge. Da die M gerade durch n abgezählt werden, ist auch der Rand von $\mathcal{C}$ eine Nullmenge. Somit ist C Jordan-messbar.

Leider hast du einen Denkfehler drin. M_n besteht zwar für jedes n aus Intervallen, aber $\mathcal{C}$ nicht mehr. Deswegen kannst du nicht nur die Randpunkte der Intervalle betrachten. Wenn du die Def. von $\partial\mathcal{C}$ direkt überprüfst, stellst du fest: $\partial\mathcal{C} = \mathcal{C}$. 3/4

Aufgabe 2 Transformation zu Polarkoordinaten

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r f\left(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Das erste Integral kann ich aufspalten in:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

Die Transformation von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten lautet:

$$\Phi(r,\phi) = r\begin{pmatrix}\cos(\phi)\\ \sin(\phi)\end{pmatrix}$$

Definitionsbereich von ϕ?
schon wichtig, da Φ inj. sein muss.

Die Jakobimatrix ist:

$$J = \begin{pmatrix}\frac{\partial \Phi_x}{\partial \phi} & \frac{\partial \Phi_x}{\partial r}\\ \frac{\partial \Phi_y}{\partial \phi} & \frac{\partial \Phi_y}{\partial r}\end{pmatrix}$$

Die Determinante ist einfach:

$$|J| = r\sin(\phi)^2 + r\cos(\phi)^2 = r$$

Mit der Transformationsformel, in der die Determinante als Multiplikator auftaucht, kann ich (1) umschreiben zu:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \underbrace{r}_{|J|} f\left(\Phi(r,\phi)\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Nun setze ich die Transformation explizit ein:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r f\left(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Dies ist das Integral, das gezeigt werden sollte.

Warum kannst du Fubini & Trafosatz anwenden? ⇝ Voraussetzungen erwähnen (z.B. komp. Träger, $\det D\Phi(x) > 0 \;\forall x$ etc.)
3/4

Aufgabe 3 uneigentliche Integrale

Aufgabe 3.a Existenz

Da ist Q ein Quader, also beschränkt!

Da momentan nur die Existenz zu zeigen ist, benutze ich das Lebesquesche Integrabilitätskriterium (Satz 3.6). Es bleibt also zu zeigen, dass die Integranden beschränkt sind und dass die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. → reicht hier nicht (sonst würde ja auch z.B. $\int_0^\infty 1\,dx$ existieren)

Die Exponentialfunktionen sind komplett stetig, die Exponenten auch, da es Polynome sind. Somit sind die Integranden komplett stetig.

Beschränkt sind sie auch, sie haben das Maximum in Koordinatenursprung und als Infimum 0.

Somit existieren beide Integrale. FF

Aufgabe 3.b Gleichheit

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) \, \mathrm{d}(x,y) = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x \right)^2$$

Ich schreibe das implizierte Doppelintegral in kartesischen Koordinaten.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) \, \mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2 - y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Die Exponentialfunktion ziehe ich auseinander.

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \exp\left(-y^2\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Die Integrale sind komplett voneinander unabhängig, ich ziehe sie auseinander.

$$= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-y^2\right) \, \mathrm{d}y$$

Jetzt kann ich noch y durch x umbenennen und ich bin fertig.

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x \right)^2 \checkmark$$

2/4

Aufgabe 4 Integral über Glockenkurve

Es soll folgendes Integral berechnet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x \right)^2}$$

Wie eben in der Aufgabe hergeleitet, kann ich dieses Integral auch mit zwei verschiedenen Variablen ausführen.

$$= \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) \, \mathrm{d}y \right)}$$

Die Integrale „mische“ ich nun.

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) \exp\left(-y^2\right) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x}$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x}$$

Nun transformiere ich zu Polarkoordinaten.

$$= \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi}$$

Das Integral über ϕ ist trivial.

$$= \sqrt{2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r \, \mathrm{d}r}$$

Jetzt kann ich substituieren, dazu nehme ich $z = r^2, \ \mathrm{d}z = 2r \, \mathrm{d}r$. Somit ist das Integral:

$$= \sqrt{\pi \int \exp\left(-z\right) \, \mathrm{d}z}$$

Das Integral ist recht einfach:

$$= \sqrt{\pi \left[-\exp\left(-r^2\right)\right]_0^{\infty}}$$

Das Einsetzen der Grenzen ergibt schlicht 1. Somit folgt für das Integral:

$$= \sqrt{\pi}$$

4/4

Aufgabe 5 offene Kugel

Diese Aufgabe lasse ich aus.

Programm zur Cantormenge

Ich schneide von jedem kompakten Teilinterval $I \in M$ genau den ϵ-Ball in der Mitte heraus. Das Programm gibt die Intervalle dann aus. Es entstehen in jedem Schritt mehr und mehr Teilintervalle, die auch immer kleiner werden. Für die ersten paar Schritte sind die Teilmengen abgedruckt, danach nur noch der Inhalt. Über 19 Schritte hinaus ist auf meinem Computer mit dem naiv implementierten Algorithmus nicht sinnvoll machbar.

Das Programm errechnet für $|M_{19}| = 0.750000476837$. Ich gehe davon aus, dass im Grenzfall $n \to \infty$ einfach $\frac{3}{4}$ herauskommt.

Python Programm

Dieses Programm kann auch unter http://uni-bonn.de/~s6mauedi/math240/ heruntergeladen werden.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

# Copyright © 2012 Martin Ueding <dev@martin-ueding.de>

# This program is free software: you can redistribute it and/or modify it
```

```
# under the terms of the GNU General Public License as published by the Free
# Software Foundation, either version 2 of the License, or (at your option)
# any later version.
#
# This program is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT
# ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
# FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for
# more details.
#
# You should have received a copy of the GNU General Public License along
# with this program. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

# Dieses Programm iteriert die Cantormenge aus math240, Übungszettel 9,
# Aufgabe 1.

import pprint

def main():
    printer = pprint.PrettyPrinter(indent=4)

    # Maximalwert für die Iterationen: $n_{\max} := 19$
    nmax = 19

    # Die gegebene Anfangsmenge $M_0 = \{[0,1]\}$. Das
    # ganze wird hier als Tupel in einer Liste dargestellt. Die Menge $M$
    # (hier als Liste implementiert) enthält dann die Intervalle $I$ (hier als
    # Tupel implementiert).
    M = [(0.0, 1.0)]

    # Gehe nun die $n = 1, ..., n_{\max}$ durch.
    for n in range(1, nmax + 1):
        # Wende die Iterationsvorschrift für $M_n$ mit $M_{n-1}$ an.
        M = schritt(M, n)

        # Gebe $n$ und $|M_n|$ aus.
        print "n: {n:2d}, Inhalt {inhalt:.10f}".format(n=n, inhalt=inhalt(M))

        # Gebe für $n \leq 4$ die $I \in M_n$ aus.
        if n <= 4:
            printer.pprint(M)

# Wende die Formel $T_n(I)$ für jedes $I \in M$ an.
# $M := \bigcup_{I \in M} T_n(I)$
def schritt(M, n):
    return [item for sublist in (T(n, I) for I in M) for item in sublist]

# Berechne ein $\epsilon$ aus dem $n$ und schneide dieses aus $I$ heraus.
def T(n, I):
    a = I[0]
    b = I[1]

    # $\epsilon := 2^{2-n-1}$
    epsilon = 2.0**(-2.0*n -1)
```

```python

        # $[a, \frac{a+b}{2} - \frac{\epsilon}{2}] \cup [\frac{a+b}{2} + \frac{\epsilon}{2}, b]$
        return [(a, (a+b)/2-epsilon/2), ((a+b)/2+epsilon/2, b)]

# Berechne den Inhalt von I, indem der Durchmesser der einzelnen Teile
# addiert wird.
def inhalt(M):
    # Sei $I$ gegeben durch $[a, b]$. Dann ist die Summe:
    # $\sum_{I \in M} |I| = \sum_{I \in M} (b - a)$
    return sum([I[1]-I[0] for I in M])

if __name__ == '__main__':
    main()
```

Ausgabe des Programs

```
n:  1, Inhalt 0.8750000000
[(0.0, 0.4375), (0.5625, 1.0)]
n:  2, Inhalt 0.8125000000
[(0.0, 0.203125), (0.234375, 0.4375), (0.5625, 0.765625), (0.796875, 1.0)]
n:  3, Inhalt 0.7812500000
[   (0.0, 0.09765625),
    (0.10546875, 0.203125),
    (0.234375, 0.33203125),
    (0.33984375, 0.4375),
    (0.5625, 0.66015625),
    (0.66796875, 0.765625),
    (0.796875, 0.89453125),
    (0.90234375, 1.0)]
n:  4, Inhalt 0.7656250000
[   (0.0, 0.0478515625),
    (0.0498046875, 0.09765625),
    (0.10546875, 0.1533203125),
    (0.1552734375, 0.203125),
    (0.234375, 0.2822265625),
    (0.2841796875, 0.33203125),
    (0.33984375, 0.3876953125),
    (0.3896484375, 0.4375),
    (0.5625, 0.6103515625),
    (0.6123046875, 0.66015625),
    (0.66796875, 0.7158203125),
    (0.7177734375, 0.765625),
    (0.796875, 0.8447265625),
    (0.8466796875, 0.89453125),
    (0.90234375, 0.9501953125),
    (0.9521484375, 1.0)]
n:  5, Inhalt 0.7578125000
n:  6, Inhalt 0.7539062500
n:  7, Inhalt 0.7519531250
n:  8, Inhalt 0.7509765625
n:  9, Inhalt 0.7504882812
n: 10, Inhalt 0.7502441406
n: 11, Inhalt 0.7501220703
```

```
n: 12, Inhalt 0.7500610352
n: 13, Inhalt 0.7500305176
n: 14, Inhalt 0.7500152588
n: 15, Inhalt 0.7500076294
n: 16, Inhalt 0.7500038147
n: 17, Inhalt 0.7500019073
n: 18, Inhalt 0.7500009537
n: 19, Inhalt 0.7500004768
```

sehr schön :)

wenn du das weiterführen oder denken würdest

würdest du feststellen $|M_n| > \frac{1}{2} \;\forall n$.

$\Rightarrow C$ keine Nullmenge $\Rightarrow \partial C = C$ keine Nullmenge