Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 8
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

6. Juni 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 16

Aufgabe 1 Exponentialfunktion auf Quader

Gegeben ist ein n-Dimensionaler Quader mit Kantenlängen $(2r_j)_{j\in[1,n]}$, zentriert im Ursprung:

$$Q = \prod_{j=1}^{n} [-r_j, r_j]$$

Berechnet werden soll die Funktion F:

$$F(x) = \int_Q \exp\left(-i < x, y >\right) \,\mathrm{d}y$$

Dabei interpretiere ich $< x, y >$ als $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, also als Skalarprodukt:

$$F\left(\vec{x}\right) = \int_Q \exp\left(-i\vec{x}\cdot\vec{y}\right) \,\mathrm{d}\vec{y}$$

Dabei muss über alle Dimensionen von Q integriert werden. Das ganze schreibe ich in Komponenten:

$$F\left(\vec{x}\right) = \int_{-r_1}^{r_1} \int_{-r_2}^{r_2} \dots \int_{-r_n}^{r_n} \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) \,\mathrm{d}y_n \dots \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_1$$

Wenn ich die Exponentialfunktion nach y_j partiell ableite, erhalte ich einen Vorfaktor von $-ix_j$. Wenn ich also den Kehrwert davon vor die Exponentialfunktion stelle, habe ich das Integral nach $\mathrm{d}x_j$, da beim Ableiten gerade dieser Faktor verschwindet. Ich führe also das erste Integral aus:

$$F\left(\vec{x}\right) = \int_{-r_1}^{r_1} \int_{-r_2}^{r_2} \dots \int_{-r_{n-1}}^{r_{n-1}} \frac{1}{-ix_n} \left[\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)\right]_{y_n=-r_n}^{y_n=r_n} \mathrm{d}y_{n-1} \dots \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_1$$

Das Einsetzen der Grenzen schaue ich mir im Detail an:

$$\left[\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)\right]_{y_n=-r_n}^{y_n=r_n} = \exp\left(-i\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j + x_n r_n\right)\right) - \exp\left(-i\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j - x_n r_n\right)\right)$$

Dabei kann ich eine Exponentialfunktion ausklammern:

$$= \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j\right)\left(\exp\left(-ix_n r_n\right) - \exp\left(ix_n r_n\right)\right)$$

Der erste Faktor ist letztlich die Exponentialfunktion, die wir voher hatten, nur ist das letzte x_j, also y_n, raus. Da wir allerdings auch kein Integral mehr darüber haben, ändert das für die weiteren, inneren Integralen, nichts. Diese werden also genauso funktionieren. Die zweite Klammer hängt nicht von $\vec{y}$ ab, somit kann ich das vor alle Integrale schreiben. Da jedes Integral über $\mathrm{d}x_j$ mit einen derartigen Faktor liefern wird, kann ich das ganze als kompaktes Produkt schreiben:

$$F\left(\vec{x}\right) = \left((-i)^n \prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{-1} \prod_{j=1}^{n}\left(\exp\left(-ix_j r_j\right) - \exp\left(ix_j r_j\right)\right)$$

Das ganze ist sehr nah an der Definition des Sinus. Ich kann dies also auch kompakter schreiben als:

$$F\left(\vec{x}\right) = \left((-i)^n \prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{-1} \prod_{j=1}^{n} 2i\sin\left(-x_j r_j\right)$$

Aufgabe 2 Funktionenfolge

Gegeben ist eine Funktionenfolge:

$$f_n(x) = \ln\left(\left(1+x^2\right)\exp\left(n\max\{1-n|x|,0\}\right)\right)$$

Das n ist in der Aufgabenstellung nicht definiert, ich gehe davon aus, dass es aus $\mathbb{N}$ stammt.

Aufgabe 2.a Menge der Unstetigkeitsstellen

Für den Grenzwert spielt das $(1+x^2)$ keine Rolle, da es für alle x definiert ist. Für jedes noch so kleine x $(0 < |x| \ll 1)$ lässt sich ein n finden, so dass $n|x|$ größer als 1 ist. Damit wird der erste Term im Maximum kleiner als 0, das ganze Maximum wird dann zu 0. Damit wird der ganze Exponent 0. Falls $x = 0$, dann ist das Maximum 1, weil ja nichts abgezogen wird. Damit bleibt die das Maximum erhalten und der Exponent geht gegen unendlich. Als Funktion bleibt letztlich:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \ln\left(1+x^2\right) & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

Da nur für ein einzelnes x die Funktion keinen endlichen Grenzwert hat, ist die Menge der Unstetigkeiten eine Nullmenge.

Aufgabe 2.b Übereinstimmung mit einer stetigen Funktion

Die Grenzfunktion nähert sich fast vollständig, also bis auf $x = 0$, an folgende Funktion an:

$$f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$$

An der Stelle $x = 0$ habe ich die Funktion einfach weitergeführt, da die Funktion dann stetig wird. Da diese aus elementaren Funktionen zusammengesetzt ist, ist sie wirklich stetig.

Aufgabe 2.c Grenzwert des Integrals

Es soll gezeigt werden, dass folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Für das (unbestimmte) Integral muss ich eine Fallunterscheidung machen. Dabei ist der Fall, dass $n|x| \geq 1$, einfach, da die Exponentialfunktion wegfällt. Im anderen Fall ist $n|x| < 1$. Dabei muss beim Integrieren der Betragsfunktion noch eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

$$F_n(x) = \begin{cases} -2x + 2\arctan(x) + x\ln\left(1+x^2\right) & n|x| \geq 1 \\ 2\arctan(x) + \frac{1}{2}x\left(-4 + n^2x + 2\ln\left(e^{n-n^2x}\left(1+x^2\right)\right)\right) & n|x| < 1 \vee x \geq 0 \\ 2\arctan(x) + \frac{1}{2}x\left(-4 - n^2x + 2\ln\left(e^{n-n^2x}\left(1+x^2\right)\right)\right) & n|x| < 1 \vee x < 0 \end{cases}$$

Wenn $n \to \infty$, dann tritt der zweite Fall nur noch für $x = 0$ ein, da man zu jedem $|x|$ ein n gefunden werden kann, sodass $n|x| \geq 1$ ist. Der dritte Fall tritt gar nicht mehr ein, da $n|x|$ beliebig groß wird, sofern $x \neq 0$ gilt.

Somit bleibt als Grenzfunktion:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-2x + 2\arctan(x) + x\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-1}^{1} = -4 + \pi + \ln(4)$$

Aufgabe 2.d Vergleich mit stetiger Funktion

Der gerade bestimmte Grenzwert soll mit diesem Integral verglichen werden:

$$F(1) - F(-1) = \left[\ln\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right]_{-1}^{1}$$

Es passt genau, die Funktion F_n konvergiert mit fast allen Punkten gegen F.

Aufgabe 3 Cantor-Menge

Letztlich ist die Menge T für ein Intervall dessen erstes uns letztes Drittel, und das mittlere Drittel als offene Menge entfernt.

Mit der Rekursionsvorschrift wird eine Menge genommen und von allen ihren Teilen das mittlere Drittel entfernt. Die Vereinigung aller dieser M_n ist das letzte M_n, da dieses am kleinsten ist und in M_{n-1} einige mittlere Drittel noch nicht entfernt sind. Das Resultat ist eine Art fraktale Struktur. Für große n kann beliebig viel von der Menge M_0 weggeschnitten werden, das Volumen (in diesem Fall der Durchmesser der Intervalle) kann damit beliebig klein werden.

Für das Volumen gilt:

$$V(M_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n V(M_0)$$

Daraus folgt direkt, dass:

$$\lim_{n\to\infty} V(M_n) = 0$$

Aufgabe 4 Satz von Fubini

Gegeben ist eine Menge:

$$U = (0, \infty) \times (0, \infty)$$

Dies ist letztlich $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Gegeben ist eine stetige Funktion, die sogar auf dem Abschluss von U stetig ist.

Die Stammfunktion zu f ist definiert als:

$$F(x, y) = \int_{[0,x]\times[0,y]} f(\xi, \eta), \, \mathrm{d}(\xi, \eta)$$

Es soll gezeigt werden, dass F einmal stetig partiell differenzierbar ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit leite ich nach x ab. Die Ableitung anch y folgt analog aus der Symmetrie von U und $\overline{U}$.

Nach dem Satz von Fubini darf ich das Integral in zwei Teile aufteilen:

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\xi$$

Ich leite formal nach x ab:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\xi$$

Sei $\hat{f}$ die Stammfunktion zu $\int f(\xi, \eta) \,\mathrm{d}\xi$. Dann kann ich die Integrale vertauschen (oder vorher anders wählen) und das innere Integral ausführen:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \left[\hat{f}(\xi, \eta)\right]_{\xi=0}^{\xi=x} \,\mathrm{d}\eta$$

Die Ableitung kann ich reinziehen, weil die Funktion f stetig ist und ihre Stammfunktion erst recht stetig ist. Außerdem setze ich die Grenzen ein.

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{f}(x, \eta) - \hat{f}(0, \eta)\right) \,\mathrm{d}\eta$$

Die Ableitung dieser Summe lässt den zweiten Summanden wegfallen. Da $\hat{f}$ allerdings gerade die Stammfunktion bezüglich der ersten Variable war, erhalte ich einfach wieder f:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \int_0^y f(x, \eta) \,\mathrm{d}\eta$$

Da f eine stetige Funktion ist, kann sie integriert werden und die Funktion, die dann rauskommt, ist auch wieder stetig. Somit ist gezeigt, dass F einmal stetig partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 5 partielle Ableitungen

Letztlich soll gezeigt werden, dass ein F existiert, sodass gilt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Wobei gelten muss, dass:

$$F = \int g \,\mathrm{d}x = \int h \,\mathrm{d}y$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit integriere ich zuerst nach x:

$$F = \int g \,\mathrm{d}x = G + C$$

Der Trick ist nun, dass C keine Funktion von x sein darf. Da hier allerdings nur partiell abgeleitet wird, darf C von y abhängen. Ich erhalte also:

$$F = G + C(y)$$

Die Ableitung nach x ist offensichtlich g.

Dieses F kann ich nun nach y ableiten und erhalte:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial y} = h$$

Nun muss man nur noch $C(y)$ gerade so wählen, dass die obere Gleichung gilt. Dadurch, dass

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

gilt, ist das ganze auch eindeutig definiert.