Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 7
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

23. Mai 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	0 / 4	3 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	15 / ~~20~~ 16

→ 5

sehr gut!

Aufgabe 1 Polarkoordinaten

Diese Aufgabe lasse ich aus.

Aufgabe 2 harmonische Funktion

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = g\left(\|x\|_2\right)$$

Aufgabe 2.a f ist harmonisch

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\vec{\nabla}^2 f = 0$$

Ich bilde zuerst die erste partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial \|x\|_2} \frac{\partial \|x\|_2}{\partial x_i}$$

Dies leite ich noch einmal partiell ab.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial \|x\|_2^2} \left(\frac{\partial \|x\|_2}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial \|x\|_2} \frac{\partial^2 \|x\|_2}{\partial x_i^2}$$

Dies lässt sich auch kompakter schreiben als:

$$= g''(\|x\|_2)\|x\|_2'^2 + g'(\|x\|_2)\|x\|_2''$$

Nun bilde ich die Summe über alle i, damit ich die Divergenz des Gradienten habe.

$$\vec{\nabla}^2 f = \sum_i \left(g''(\|x\|_2) \left(\frac{x_i}{\|x\|_2}\right)^2 + g'(\|x\|_2) \left(\frac{1}{\|x\|_2} - \frac{x_i^2}{\|x\|_2^3}\right)\right)$$

Ich setze $t := \|x\|_2$ ein.

$$= g''(t) + g'(t)\frac{1}{t}$$

Dies war allerdings gerade in der Aufgabenstellung als 0 definiert.

$$= 0$$ ✓

Somit ist f harmonisch. ✓

Aufgabe 2.b das erweiterte f ist zweimal differenzierbar

stetigen Fortsetzung

Es ist zu zeigen, dass die Funktion f an der Stelle $(0, 0)$ mit der ~~Erweiterung~~ auch stetig differenzierbar ist. Warum lässt sich f stetig fortsetzen auf ganz $\mathbb{R}^2$?

Zuerst folgenden Einschub: Ich untersuche das Konvergenzverhalten der Ableitung der Norm:

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{x_i}{\|x\|_2} = \lim_{x_i \to 0} \frac{x_i}{\sqrt{\sum_i x_i^2}}$$

Ich wende hier die Regel von l'Hospital an.

$$\rightsquigarrow \quad \lim_{x_i \to 0} \frac{\sqrt{\sum_i x_i^2}}{x_i}$$

Das stimmt so nicht, l'Hospital kannst du nur anwenden, wenn beides gegen 0 geht. Das ist nur der Fall für $x_j = 0 \; \forall j \neq i$!

Da der Bruch das gleiche Konvergenzverhalten hat wie sein Kehrwert, muss der Bruch endlich sein, also weder 0, noch ∞.

Es ist also zu zeigen, dass folgender Differenzenquotient (ausgewertet an der Stelle 0) existiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g\left(\|h\vec{e}_i\|\right)}{h}$$

richtige Idee mit Differenzenquotienten ☺

Dies ist gerade $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Die Ableitung davon hatte ich oben schon bestimmt:

$$g''(\|x\|_2)\|x\|_2'^2 + g'(\|x\|_2)\|x\|_2''$$

Wie gerade gezeigt, hat die Norm ein endliches Konvergenzverhalten. Die Funktionen g' und g'' konvergieren gegen 0. Das Produkt von „gegen 0“ und „endlich“ ergibt „gegen 0“. Somit existiert dieser Differenzenquotient und f ist auch an der Stelle $(0, 0)$ zweimal stetig differenzierbar. FF

Aufgabe 2.c f ist noch immer harmonisch

An der Stelle $(0, 0)$ sind die beiden Ableitungen gerade 0, somit ist der ganze Term 0. Die Funktion bleibt also auch auf dieser Stelle harmonisch. ✓

3/4

Aufgabe 3 Landau

In der Aufgabenstellung ist kein Grenzpunkt für das Landausymbol angegeben. Da diese Gleichung für $\|x\|^3 \to \infty$ gar nicht gilt, nehme an, dass $\|x\|^3 \to 0$ gemeint ist.

Es soll also gezeigt werden, dass ich f umschreiben kann. f ist so definiert:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh(x_1 x_2) \\ \cosh(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

Dies soll mit dem Landausymbol geschrieben werden als:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\|x\|^3\right)$$

Ich schreibe die hyperbolischen Funktionen als ihre Definition über die Exponentialfunktion. Diese schreibe ich dann wieder als Potenzreihe und erhalte durch Zusammenfassen der Terme, die aus $\exp(x_1 x_2)$ und $\exp(-x_1 x_2)$ kommen:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + \frac{1}{6}(x_1 x_2)^3 + \dots \\ 1 + \frac{1}{2}(x_1 x_2)^2 + \frac{1}{24}(x_1 x_2)^4 + \dots \end{pmatrix}$$

Die restlichen Terme der Exponentialreihe sind klein, wenn $x \ll 1$ gilt, was ich aus der Aufgabenstellund so interpretiere, da ansonsten nicht das gewünschte Ergebnis herauskommen kann. Weiterhin folgt aus $\|x\| \to 0$, dass x_1 und x_2 sich auch 0 annähern müssen. Somit kann ich dies auch schreiben als:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 1 + \frac{1}{2}(x_1 x_2)^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\|x\|^3\right)$$

Dabei kann ich das $(x_1 x_2)^2$ noch in das $\mathcal{O}$ hereinziehen.

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\|x\|^3\right) \quad ✓$$

4 / 4

~~Aus dem $\mathcal{O}$ kann ich mir noch einen Faktor 2 für den oberen Teil nehmen. Somit kann ich das ganze schreiben als:~~

$$\cancel{f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\|x\|^3\right)}$$

Falsch, der Faktor 2 war nur zum trollen da, du bist leider reingefallen! Trotzdem, weil du so schön texst,

Aufgabe 4 Quader

Mit ε-δ in (3) und (7) in der nächsten Aufgabe.

Ich teile das Quadrat, über dem ich integriere in $\epsilon \times \epsilon$ große Teilquadrate auf. Dies ist auch gleich meine Feinheit. Die Untersumme kann ich schreiben:

$$U(f, Z_2(\epsilon,\epsilon)) = \epsilon^2 \sum_{x=0}^{\frac{1}{\epsilon}-1} x\epsilon \sum_{y=0}^{\frac{1}{\epsilon}-1} \exp(\epsilon y) \tag{1}$$

Mit der Formel für die geometrische Reihe und der Formel für die Summe der natürlichen Zahlen von Gauß kann ich diese Summe schreiben als:

$$\Leftrightarrow \quad U(f, Z_2(\epsilon,\epsilon)) = -\frac{(e-1)(\epsilon-1)\epsilon}{2(\exp(\epsilon)-1)}$$

Davon bilde ich jetzt den Grenzwert $\epsilon \searrow 0$ und erhalte:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} = U(f, Z_2(\epsilon, \epsilon)) = \frac{1}{2}(e-1) \quad \checkmark$$

Das ganze war jetzt die Untersumme, für die Obersumme ist das ganze ähnlich, nur müssen die Grenzen an den Summenzeichen leicht geändert werden.

$$O(f, Z_2(\epsilon, \epsilon)) = \epsilon^2 \sum_{x=1}^{\frac{1}{\epsilon}} x \sum_{y=1}^{\frac{1}{\epsilon}} \exp(\epsilon y) \tag{2}$$

Dies kann ich vereinfachen zu:

$$\Leftrightarrow \quad O(f, Z_2(\epsilon, \epsilon)) = \frac{(e-1)\exp(\epsilon)\epsilon(1+\epsilon)}{2(\exp(\epsilon)-1)}$$

Der Grenzwert $\epsilon \searrow 0$ davon ist genau der gleiche, wie schon vorher:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} O(f, Z_2(\epsilon, \epsilon)) = \frac{1}{2}(e-1) \quad \checkmark$$

Aufgabe 5 Grenzwerte

Aufgabe 5.a Unter- und Obersummen

Aufgabe 5.a.1 Untersumme über F_x

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} U(f, Z_2(\epsilon, \delta)) = U(F_x, Z_1(\delta))$$

Ich integriere die Funktion, dies ist ja recht einfach. Ich erhalte:

$$F_x = \frac{e^y}{2} \quad \checkmark$$
$$F_y = (e-1)x \quad \checkmark$$

Nun bilde ich die Untersumme:

$$U(f, Z_2(\epsilon, \delta)) = \epsilon\delta \sum_{x=0}^{\frac{1}{\epsilon}-1} \epsilon x \sum_{x=0}^{\frac{1}{\delta}-1} \exp(\delta y)$$

Diese Summe kann ich wieder vereinfachen, indem ich die Formel für die geometrische Reihe anwende und die Formel von Gauß für die Summe über die natürlichen Zahlen. Ich vereinfache diese Summe zu:

$$U(f, Z_2(\epsilon, \delta)) = -\frac{\delta(e-1)(\epsilon-1)}{2(\exp(\delta)-1)} \quad \checkmark \tag{3}$$

Und noch die Untersumme über F_x:

$$U(F_x, Z_1(\delta)) = \delta \sum_{x=0}^{\frac{1}{\delta}-1} \frac{1}{2} \exp(\delta y)$$

Diese Summe kann ich mit den gleichen Methoden vereinfachen zu:

$$U(F_x, Z_1(\delta)) = \frac{\delta(e-1)}{2(\exp(\delta)-1)} \quad \checkmark \tag{4}$$

Es ist leicht zu sehen, dass der Grenzwert $\epsilon \searrow 0$ von (3) gerade gleich (4) ist. ✓

Aufgabe 5.a.2 Untersumme über F_y

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\lim_{\delta\searrow 0} U(f, Z_2(\epsilon,\delta)) = U(F_y, Z_1(\epsilon))$$

Die Untersumme über F_y ist letztlich das gleiche Schema. Dabei kann ich (3) wieder benutzen, hier hat sich ja nichts verändert. Allerdings muss ich eine neue Gleichung analog zu (4) aufstellen:

$$U(F_y, Z_1(\epsilon)) = \epsilon \sum_{x=0}^{\frac{1}{\epsilon}-1} (e-1)\epsilon x$$

Dies kann ich wieder vereinfachen zu:

$$U(F_y, Z_1(\epsilon)) = -\frac{(e-1)(\epsilon-1)}{2} \tag{5}$$

Wenn ich bei (3) den Grenzwert nach $\delta \searrow 0$ bilde, erhalte ich:

$$\lim_{\delta\searrow 0} U(F_y, Z_1(\epsilon)) = -\frac{1}{2}(e-1)(\epsilon-1) \quad ✓ \tag{6}$$

Dies, also (6) ist gerade genau (5), was ja gezeigt werden sollte.

Aufgabe 5.a.3 Obersumme über F_x

Hier das gleiche Spiel noch einmal, allerdings mit Obersummen. Letztlich bleibt fast alles gleich, nur die Grenzen an den Summenzeichen ändern sich noch.

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} O(f, Z_2(\epsilon,\delta)) = O(F_x, Z_1(\delta))$$

Nun bilde ich die Obersumme:

$$O(f, Z_2(\epsilon,\delta)) = \epsilon\delta \sum_{x=1}^{\frac{1}{\epsilon}} \epsilon x \sum_{x=1}^{\frac{1}{\delta}} \exp(\delta y)$$

Diese Summe kann ich wieder vereinfachen, indem ich die Formel für die geometrische Reihe anwende und die Formel von Gauß für die Summe über die natürlichen Zahlen. Ich vereinfache diese Summe zu:

$$O(f, Z_2(\epsilon,\delta)) = -\frac{\delta(e-1)\exp(\delta)(\epsilon-1)}{2(\exp(\delta)-1)} \tag{7}$$

Und noch die Obersumme über F_x:

$$O(F_x, Z_1(\delta)) = \delta \sum_{x=1}^{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{2}\exp(\delta y)$$

Diese Summe kann ich mit den gleichen Methoden vereinfachen zu:

$$O(F_x, Z_1(\delta)) = \frac{\delta(e-1)\exp(\delta)}{2(\exp(\delta)-1)} \tag{8}$$

Es ist leicht zu sehen, dass der Grenzwert $\epsilon \searrow 0$ von (7) gerade gleich (8) ist. ✓

Aufgabe 5.a.4 Obersumme über F_y

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\lim_{\delta \searrow 0} O(f, Z_2(\epsilon, \delta)) = O(F_y, Z_1(\epsilon))$$

Die Untersumme über F_y ist letztlich das gleiche Schema. Dabei kann ich (7) wieder benutzen, hier hat sich ja nichts verändert. Allerdings muss ich eine neue Gleichung analog zu (8) aufstellen:

$$O(F_y, Z_1(\epsilon)) = \epsilon \sum_{x=1}^{\frac{1}{\epsilon}} (e-1)\epsilon x$$

Dies kann ich wieder vereinfachen zu:

$$O(F_y, Z_1(\epsilon)) = \frac{(e-1)(\epsilon-1)}{2} \tag{9}$$

Wenn ich bei (3) den Grenzwert nach $\delta \searrow 0$ bilde, erhalte ich:

$$\lim_{\delta \searrow 0} O(F_y, Z_1(\epsilon)) = -\frac{1}{2}(e-1)(\epsilon-1) \tag{10}$$

Dies, also (10), ist gerade genau (9), was ja gezeigt werden sollte. ✓

Aufgabe 5.b Reihenfolge der Grenzwerte

Es soll gezeigt werden, dass die Reihenfolge der Grenzwerte egal ist. Ich beginne zuerst mit dem Grenzwert von (3) nach ϵ. Der Grenzwert ist:

$$\frac{\delta(e-1)}{2(\exp(\delta)-1)} \tag{11}$$

Davon bilde ich jetzt noch den Grenzwert nach δ:

$$\frac{1}{2}(e-1) \tag{12}$$

Den Grenzwert von (3) nach δ hatte ich schon auf (6) bestimmt. Davon nehme ich noch den Grenzwert nach ϵ:

$$\frac{1}{2}(e-1) \tag{13}$$

Man sieht direkt, dass (12) genau gleich (13) ist. Somit ist die Behauptung gezeigt.

Als letztes setze ich $\delta = \epsilon$ und erhalten das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe, welches auch genau dieser Wert aus (12) ist.

Aufgabe 5.c Integralgleichung

In der Vorlesung hatten wir das Integral im Mehrdiemensionalen definiert als die Riemannsche Summe. Somit folgt diese Gleichung direkt, wenn man die entsprechenden Untersummen mit einem Integral über die entsprechende Größe identifiziert. ✓

Aufgabe 5.d Arcustangens

Anhand der Funktion $g(\epsilon, \delta) = \arctan\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)$ soll ich zeigen, dass die Grenzwerte nicht beliebig zu vertauschen sind.

Wenn ich zuerst $\epsilon \searrow 0$ betrachte, dann erhalte ich $\arctan(0) = 0$. Daran wird der Grenzwert von δ nichts mehr ändern, da dieses gar nicht mehr vorkommt. ✓

Wenn ich $\delta = \epsilon$ setze, dann kürzt sich das im Bruch direkt weg und ich halte als Grenzwert $\arctan(1) = 1$. ✓

Und wenn ich den Grenzwert $\delta \searrow 0$ zuerst bilde, komme ich letztlich $\arctan(\infty)$ heraus, was $\frac{1}{2}\pi$ ist.

Somit sind die Grenzwerte paarweise verschiedenen und keineswegs gleich.

✓

sehr schön!

4/4