Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 6
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

18. Mai 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 20

Aufgabe 1 totales Differential

Gegeben ist eine Funktion $f(x, y)$, es soll die Menge aller Punkte bestimmt werden, in denen f total differenzierbar ist. Danach soll das totale Differential bestimmt werden.

Aufgabe 1.a Menge der Punkte

Damit f definiert ist, müssen drei Bedingungen erfüllt sein. Die erste kommt daher, dass der Logarithmus nur für positive Zahlen reell ist.

$$x^2 + y^2 > 0$$

Die zweite Bedingung verhindert eine Division durch null:

$$x^4 + y^4 \neq 0$$

Außerdem ist die Betragsfunktion an der Stelle $x = 0$ nicht ableitbar.

Die Menge $\mathbb{D}$ aller Punkte, in denen f total differenzierbar ist, ist:

$$\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0 \vee x^4 + y^4 \neq 0 \vee x \neq 0\right\}$$

Aufgabe 1.b totales Differential

Da die Funktion f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ abbildet, ist die totale Ableitung die Jacobimatrix der Dimension 3×2 multipliziert mit den Differentialen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$. Zuerst die Jacobimatrix:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_z(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f_z(x, y) \end{pmatrix}$$

Die Ableitungen selbst sind einigermaßen einfach zu bestimmen.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{2\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)x}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)y}{(x^2+y^2)^2} \\ y|x|^{-1+y}|x|' & |x|^y \ln(|x|) \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Ableitung der Betragsfunktion definiert als die Vorzeichenfunktion:

$$|x|' = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Das totale Differential Df ist somit:

$$Df = J\,\mathrm{d}\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{2\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)x}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)y}{(x^2+y^2)^2} \\ y|x|^{-1+y}|x|' & |x|^y \ln(|x|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 $g_v(t)$

Gegeben ist ein $f \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, ein Vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Außerdem ist eine Funktion g gegeben als:

$$g_v(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$$

Es soll g_v' und g_v'' bestimmt werden.

Aufgabe 2.a $g_v'(t)$

Die Funktion g wird nach t abgeleitet. Dies ist formal:

$$g_v'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$$

Die totale Ableitung der Funktion f ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

Der zweite Term, der durch die Kettenregel entstanden ist, ist einfach zu bestimmen. Denn $(\vec{x}_0 + t\vec{v})$ nach t abgeleitet ist einfach nur $\vec{v}$.

Somit vereinfacht sich das ganze komponentenweise zu:

$$g_v'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i$$

Und alle Komponenten lassen sich bequem mit dem Gradienten schreiben:

$$g_v'(t) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$$

Aufgabe 2.b $g_v''(t)$

Die zweite Ableitung von g_v ist die totale Ableitung nach t von g_v':

$$g_v''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i$$

Dies ist direkt schon das gewünschte Endergebnis:

$$g_v''(t) = D\left(\vec{\nabla} f \cdot v\right)$$

Aufgabe 3 Extremstellen

In der Regel liegt eine Extremstelle vor, wenn $g_v'(x_0) = 0$ und $g_v''(x_0) \neq 0$. Dabei handelt es sich um ein Minimum, wenn $g_v''(x_0) > 0$, und um ein Maximum, wenn $g_v''(x_0) < 0$. Dabei muss dies für jedes $\vec{v}$ gelten. Daraus folgen dann die Bedingungen für $\vec{\nabla} f$.

Aufgabe 4 konvexe Mengen

Das Kriterium für die Konvexität besagt letztlich, dass jede Verbindungslinie zwischen zwei Punkten komplett in der Menge liegen muss.

Hier fehlen noch Inhalte.

Aufgabe 5 Polarkoordinaten

Gegeben ist eine Funktion $f(r, \phi) \colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \mapsto \mathbb{R}$. Es sollen zwei Ausdrücke A und B gefunden werden, sodass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = (A f_{\text{polar}}(r, \phi)) \circ \Phi \quad \vee \quad \frac{\partial}{\partial y} f = (B f_{\text{polar}}(r, \phi)) \circ \Phi$$

Die Transformation $\Phi \colon (x, y) \mapsto (r, \phi)$ ist gegeben durch:

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{atan2}(y, x) \end{pmatrix}$$

Gegeben ist also eine Funktion $f(x, y)$, die kartesische Koordinaten als Eingabe hat. Diese Funktion kann normal nach x und y abgeleitet werden. Ich soll jetzt die Ausdrücke A und B finden, so dass eine Ableitung in kartesischen Koordinaten direkt in Ableitungen in Polarkoordinaten umgewandelt werden können.

Damit soll letztendlich der Gradient in Polarkoordinaten gefunden werden, also:

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_{\text{polar}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

Hier fehlen noch Inhalte.