Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 5
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

9. Mai 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 4	/ 20

Aufgabe 1 Rotation

Gegeben ist ein Vektorfeld, es soll die Rotation berechnet werden. Das Vektorfeld ist:

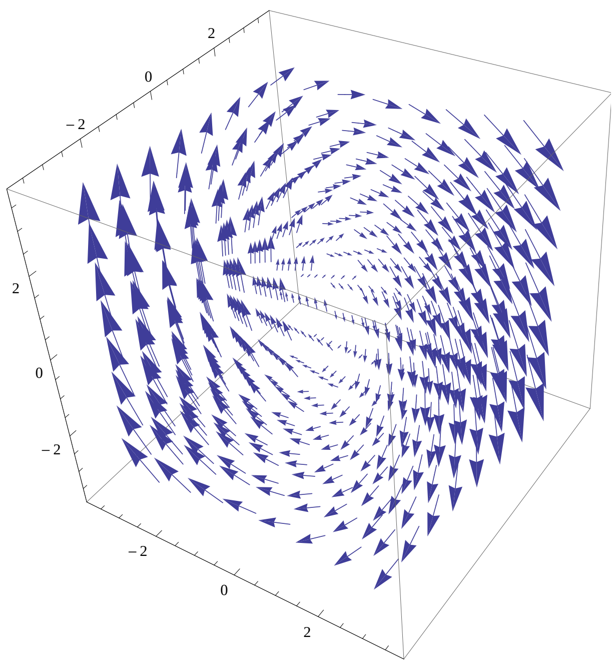
$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Die Rotation ist nicht ortsabhängig:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da das Vektorfeld eine Rotation besitzt, ist es nicht konservativ. Dies bedeutet auch, dass es nicht der Gradient eines Potentialfeldes sein kann.

Das ganze sieht aus wie ein Strudel, der schief im Raum liegt.



Aufgabe 2 Grenzwert

Gegeben ist die Definition der totalen Ableitung sowie einer Funktion g, die die Ableitung an der Stelle 0 einer Funktion gibt. Es soll $g(v)$ bestimmt werden.

g war definiert als:

$$g(v) = \frac{\partial}{\partial v} f(0)$$

Dies ist nach der Definition von f:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(hv)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (hv_1 hv_2 - hv_1 + 2hv_2 + h^5 v_1^5) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(hv_1 v_2 - v_1 + 2v_2 + h^4 v_1^5 \right) \\
&= -v_1 + 2v_2
\end{aligned}$$

Dies ist eine Ebene.

Aufgabe 3 Gradient

Gegeben ist eine Funktion, es soll der Gradient bestimmt werden.

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x} \cdot (A\vec{x}) - \vec{x} \cdot \vec{b}$$

Aufgabe 3.a Gradient bestimmen

Dazu schreibe ich die Funktion in Komponenten mit der Summenkonvention.

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(x_i \left(A\vec{x} \right)^i \right) - x^i b_i$$

Jetzt bilde ich den Gradienten. Dabei betrachte ich erstmal nur die z-te Komponente.

$$\left(\vec{\nabla} f(\vec{x}) \right)_z = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_z} \left(x_i \left(A\vec{x} \right)^i \right) - b_z$$

Ich wende die Produktregel auf das erste Produkt an.

$$\left(\vec{\nabla} f(\vec{x}) \right)_z = \frac{1}{2} \left(\left(A\vec{x} \right)_z + x_i \frac{\partial}{\partial x_z} \left(A\vec{x} \right)^i \right) - b_z$$

Das Produkt aus Matrix und Vektor schreibe ich als Summe. Dabei sind a_{ij} die Elemente der Matrix A.

$$\left(\vec{\nabla} f(\vec{x}) \right)_z = \frac{1}{2} \left(\left(A\vec{x} \right)_z + x^i \frac{\partial}{\partial x_z} a_i^j x_j \right) - b_z$$

In der zweiten Summe ist der einzige Summand, der von x_z abhängt, erreicht, wenn $z = j$. Also ist der einzige Summand, der abzuleiten ist, $a_{iz} x_z$. Dessen Ableitung ist a_{iz}.

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla} f(\vec{x}) \right)_z &= \frac{1}{2} \left(\left(A\vec{x} \right)_z + x^i a_{iz} \right) - b_z \\
\left(\vec{\nabla} f(\vec{x}) \right)_z &= \frac{1}{2} \left(\left(A\vec{x} \right)_z + a_{iz} x^i \right) - b_z
\end{aligned}$$

Dies kann ich gerade als Produkt mit einer transponierten Matrix schreiben.

$$\left(\vec{\nabla} f(\vec{x})\right)_z = \frac{1}{2}\left((A\vec{x})_z + \left(A^t\vec{x}\right)_z\right) - b_z$$

Nun fasse ich die Komponenten wieder zu kompletten Vektoren zusammen.

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(A\vec{x} + A^t\vec{x}\right) - \vec{b}$$
$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)\vec{x} - \vec{b}$$

Aufgabe 3.b A symmetrisch

Falls A symmetrisch ist, kann ich die beiden ersten Summanden zusammenfassen:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$$

Aufgabe 3.c lokales Minimum

Damit f an der Stelle $\vec{x}$ ein lokales Minimum hat muss $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = 0$ sein.

Aufgabe 4 partielle Differenzierbarkeit

Gegeben ist die Funktion f:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aufgabe 4.a zweimal differenzierbar

Es ist zu zeigen, dass f zweimal partiell differenzierbar ist. Dies bedeutet, dass zweimal der Differenzenquotient existiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v = e_1$. Der allgemeine Differenzenquotient ist:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

Falls $(x,y) \neq (0,0)$ ist, so ist dies eine ganz normale rationale Funktion mit immer positivem Nenner und ist daher beliebig oft stetig differenzierbar.

An der Stelle $(x,y) = (0,0)$ ist f ebenfalls partiell differenzierbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v = e_1$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h0\frac{h^2}{h^2} - 0}{h}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h0}{h} = 0$$

Analog ist auch die Ableitung nach e_2 genau null für $(x,y) = (0,0)$.

Aufgabe 4.b zweite Ableitung ungleich

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) \neq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$$

Nun betrachte ich die zweite partielle Ableitung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit leite ich zuerst nach x, dann nach y ab. Der Differenzenquotient wird nun zu einem geschachtelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \lim_{i \to 0} \frac{\lim_{h \to 0} \frac{f(h,i)-f(0,i)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}}{i}$$

Für den zweiten Limes setze ich die null ein, die ich vorher berechnet habe. Der zweite Summand ist gerade null, wie in der vorherigen Aufgabe gezeigt.

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \lim_{i \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{f(h,i) - f(0,i)}{hi}$$

Jetzt setze ich die Definition der Funktion ein. Dabei ist der $\lim_{i \to 0} f(0,i) = 0$, wie oben gezeigt.

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \lim_{i \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{hi \frac{h^2-i^2}{h^2+i^2}}{hi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \lim_{i \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - i^2}{h^2 + i^2}$$

Jetzt ist es entscheidend, welcher Limes zuerst vollzogen wird. Wird es in der Reihenfolge gemacht, die dort steht, kommt am Ende für die zweite Ableitung -1 raus. Werden allerdings die beiden Ableitungen, und damit die Limite, vertauscht, erhält man für die zweite Ableitung 1.

Somit ist gezeigt, dass es für diese Funktion nicht egal ist, in welcher Reihenfolge die Ableitungen gebildet werden.

Das ganze liegt daran, dass diese Funktion eigentlich an der Stelle $(0,0)$ nicht definiert ist und sie daher aus zwei Funktionen zusammengesetzt ist. Derartige Zusammensetzungen können zwar stetig sein, aber sie müssen nicht unbedingt differenzierbar sein (siehe Betragsfunktion).

Aufgabe 5 glatte Funktionen

Gegeben ist eine Funktion f aus C_0^∞, wobei die Trägermenge kompakt ist. Außerdem ist noch eine Funktion u definiert. Es soll gezeigt werden, dass u beliebig oft stetig differenzierbar ist.

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)|y| \, \mathrm{d}y$$

Die Eigenschaft mit dem R besagt nur, dass die Funktion außerhalb der Trägermenge, deren Durchmesser maximal $2R$ ist, kompakt ist. Das Integral, dass von Unendlich bis Unendlich geht, könnte daher aus genauso gut von $-R$ bis R gehen.

Aufgabe 5.a differenzierbar

Es ist zu zeigen, dass u beliebig oft stetig differenzierbar ist. Das heißt, dass dies existiert:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} u(x)$$

Aufgabe 5.a.1 differenzierbar nach y

Beweis. Die Ableitung kann ich erst einmal formal aufschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}u(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)|y|\,\mathrm{d}y$$

In der Aufgabenstellung wird darauf hingewiesen, dass ich auf der rechten Seite, also auf der Seite des Integrals, die Differenziation und Integration beliebig oft vertauschen darf. Dies bedeutet also. Also darf ich schreiben:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\underbrace{f(x-y)}_{A(y)}\underbrace{|y|}_{b(y)}\,\mathrm{d}y$$

Den Integranden kann ich noch nicht beliebig oft differenzieren, da die Betragsfunktion nicht in der Stelle $y = 0$ abzuleiten ist. Allerdings kann ich die Betragsfunktion beliebig oft integrieren. Mit der partiellen Integration kann ich das Integral (ohne Vorfaktor) auch umschreiben. Dabei ist B eine Stammfunktion zu b und a die Ableitung von A.

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}A(y)B(y)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}a(y)B(y)\,\mathrm{d}y$$

Da f auf einem kompakten Träger ist und eben dieses R exisitiert, bedeutet dies, dass:

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(x-y) = 0$$

Somit entfällt der erste Term, es bleibt der zweite Term.

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}a(y)B(y)\,\mathrm{d}y$$

Den gleichen Trick mit der partiellen Integration kann ich nun immer wieder und wieder anwenden, da a immer noch beliebig oft differenzierbar ist. Und B kann ich wieder integrieren, weil es immer noch stetig ist. Für ein vorgegebenes n kann ich also das Integral (und somit u) so umformen, dass es n-mal differenzierbar ist. Somit ist u beliebig oft stetig differenzierbar. □

Aufgabe 5.a.2 differenzierbar nach x

Die Differenzierbarkeit nach x ist trivial.

Beweis. Ich beginne mit dem zu zeigenden Integral:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}u(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)|y|\,\mathrm{d}y$$

Die Differenzierung darf ich reinziehen.

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x-y)|y|\,\mathrm{d}y$$

Da nur $f(x-y)$ von x abhängt, brauche ich die Ableitung nur darauf anzuwenden.

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x-y)\right)|y|\,\mathrm{d}y$$

Da f gerade beliebig oft differenzierbar ist, gilt die Behauptung. □

Aufgabe 5.b Laplace

Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta u(x) = f(x)$$

Aufgabe 5.b.1 Ableitung nach x

Die zweite Ableitung von u nach x ist:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)|y| \, \mathrm{d}y$$

Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x-y) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x-y)$$

Daraus kann ich umformen:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(x) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)|y| \, \mathrm{d}y$$

Nach der Produktregel ist dies:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f'(x-y)|y| + f(x-y)|y|' \right)' \, \mathrm{d}y$$

Und dies ist:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x-y)|y| + 2f'(x-y)|y|' + f(x-y)|y|'' \, \mathrm{d}y$$

Die erste Ableitung der Betragsfunktion (außerhalb von $y = 0$ ist die Vorzeichenfunktion σ, die zweite Ableitung ist null. Somit vereinfacht sich das ganze zu:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x-y)|y| + 2f'(x-y)\sigma(y) \, \mathrm{d}y$$

Aufgabe 5.b.2 Ableitung nach y

Nach y kann man die Funktion erst dann zweimal ableiten, wenn man den Trick zweimal angewendet hat. Ich beginne mit der einmal ableitbaren Form:

$$u(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x-y) \right) \left(\int |y| \right) \mathrm{d}y$$

Darauf wende ich noch einmal den Trick an. Der erste Summand ist, wie vorher auch, null und kann daher weggelassen werden.

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} f(x-y) \right) \left(\iint |y| \right) \mathrm{d}y$$

Jetzt bilde ich die erste Ableitung nach y.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}y^3} f(x-y) \right) \left(\iint |y| \right) + \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} f(x-y) \right) \left(\int |y| \right) \mathrm{d}y$$

Die zweite Ableitung wird auf diese Weise nur noch komplizierter:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} &\left(\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}y^4}f(x-y)\right)\left(\iint |y|\right) \\ &+ \left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}y^3}f(x-y)\right)\left(\int |y|\right) \\ &+ \left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}y^3}f(x-y)\right)\left(\int |y|\right) \\ &+ \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}f(x-y)\right)|y| \,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Auch dies kommt $f(x)$ nicht wirklich nahe.