Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 4
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

2. Mai 2012

Aufgabe 1 gleichmäßige Stetigkeit

Es soll gezeigt werden, dass Stetigkeit auf kompakten Teilmengen gleichmäßige Stetigkeit impliziert.

Aufgabe 1.a Gegenbeispiel

Es soll eine Funktion gefunden werden, die zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Als Beispiel kann $f(x) = x^2$ auf $[0, \infty)$ oder noch extremer $\frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ dienen. Als Metrik benutze ich in beiden Fällen einfach die euklidische Metrik. Die Steigung beider Funktionen wächst nach außen bzw. innen ins unendliche an. Dadurch ist es nicht mehr möglich ein δ zu finden, dass für ein gegebenes ϵ für alle Punkte x gilt. Verschiebt man die ϵ-δ-Box in die Richtung der größeren Steigung, wird die Funktion oben und unten aus der Box herausschauen. Somit sind diese Funktionen nicht gleichmäßig stetig.

Da die Funktionen allerdings aus den elementaren Operationen zusammengesetzt sind, sind diese stetig.

Aufgabe 1.b Stetigkeit auf kompakten Mengen

Es soll gezeigt werden, dass eine Funktion, die auf einem kompakten Interval stetig ist, auch gleichmäßig stetig ist.

Dazu wiederhole ich die Aussage des Lebesgue Lemma:

> Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von K. Dann gilt:
>
> $$\forall \mathcal{U} : \exists \lambda > 0 : \forall A \subset K \wedge \operatorname{diam}(A) < \lambda : \exists U \in \mathcal{U} : A \subset U$$

Vorgegeben sei eine kompakte Teilmenge A und ein $\epsilon > 0$.

Der entscheidende Unterschied zwischen normaler und gleichmäßiger Stetigkeit im Punkt x_0 ist, dass das δ im zweiten Fall nicht von dem Punkt x_0 abhängen darf.

Da die Funktion f, die gegeben ist, in allen $x_0 \in A$ stetig ist, gilt bereits:

$$\forall \epsilon > 0 : \forall x_0 \in A : \exists \delta > 0 : \forall x \in A : d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Es ist zu zeigen, dass wenn die Menge A kompakt ist, daraus folgt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in A : \forall x \in A : d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Beweis. Sei $f : X \mapsto Y$ eine stetige Funktion, sei $\epsilon > 0$ und sei $A \subset X$ ein kompakter metrischer Raum. Da f stetig ist, gilt:

$$\forall x \in A : \exists \delta_x : f[B(\delta_x, x)] \subset B(\epsilon, f(x))$$

Die offenen Kugeln $B(\delta_x, x)_{x \in A}$ bilden eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, kann ich eine endliche Teilüberdeckung finden:

$$\left\{ B\left(\frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i\right) \right\}_{i=1}^{n}$$

Das Lebesgue Lemma garantiert mir nun, dass ich ein δ finden kann, sodass alle x, y in der gleichen offenen Kugel $B(\delta_{x_i}, x_i)$ liegen, falls ihr Abstand $d_X(x, y) < \delta$ ist.

Somit folgt:

$$d_X(x_i, y) \leq d_X(x_i, x) + d_X(x, y) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \delta \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}$$

Dieses δ gilt für alle x, sodass gilt:

$$\exists \delta : \forall x \in A : f[B(\delta, x)] \subset B(\epsilon, f(x))$$

Somit ist die gleichmäßige Stetigkeit gezeigt. □

Aufgabe 2 logarithmische Spirale

Gegeben ist die Definition einer logarithmischen Spirale. Es soll gezeigt werden, dass diese Spirale jeden Kreis in genau einem Punkt schneidet. Außerdem soll der Schnittwinkel berechnet werden.

Aufgabe 2.a eindeutiger Schnittpunkt

Um mir das Leben etwas einfacher zu machen benutze ich eine Parameterdarstellung in Polarkoordinaten. Die Spirale ist dann:

$$f(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ct} \\ t \end{pmatrix}$$

Ein Kreis mit Radius R ist in Polarkoordinaten einfach:

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ t \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist dort, wo der Radius gleich ist, also muss gelten:

$$R = e^{ct}$$

Durch die strenge Monotonie der Exponentialfunktion ist R eindeutig bestimmt. Somit ist gezeigt, dass die Spirale den Kreis in nur einem Punkt schneidet.

Aufgabe 2.b Schnittwinkel

Den Schnittwinkel kann ich über das Skalarprodukt zwischen den Einheitsvektoren der Ableitung von Spirale und Kreis herausfinden.

Hierbei benutze ich wieder kartesische Koordinaten.

Als erstes bestimme ich die Ableitung der Spirale:

$$f'(t) = e^{ct} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors ist:

$$|f'(t)| = e^{ct} \sqrt{(-\sin(t) + c\cos(t))^2 + (\cos(t) + c\sin(t))^2} = e^{ct} \sqrt{(1 + c^2)}$$

Somit ist der Einheitsvektor $\hat{f}'(t)$:

$$\hat{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \left(\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right)$$

Der Kreis ist schlicht:

$$k(t) = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Und dessen Ableitung:

$$k'(t) = R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Der Einheitsvektor für die Ableitung des Kreises ist offensichtlich:

$$\hat{k}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt zwischen den beiden ist ein Maß für den Winkel:

$$\hat{f}'(t) \cdot \hat{k}'(t) = \frac{[-\sin(t) + c\cos(t)]\,[-\sin(t)] + [\cos(t) + c\sin(t)]\cos(t)}{\sqrt{1 + c^2}}$$

Die Quadrate lassen sich zu 1 zusammenfassen, die Terme mit c heben sich gegenseitig auf. Somit bleibt als Produkt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}$$

Der Winkel ist somit:

$$\measuredangle(\text{Spirale}, \text{Kreis}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}\right)$$

Dies kann man auch kompakter schreiben als:

$$\measuredangle(\text{Spirale}, \text{Kreis}) = \arctan\left(\frac{1}{c}\right)$$

Da diese Spirale laut Wolfram Mathworld[1] auch als „equiangular spiral“ bezeichnet wird, ist es logisch, dass der Winkel nicht vom Radius R abhängt.

Aufgabe 3 Newtonpotential

Gegeben ist die Definition des Newtonpotentials. Es soll die Divergenz des Gradienten (Laplace-Operator $\vec{\nabla}^2$) von eben diesem Potentialfeld errechnet werden.

$$N(x) = \frac{1}{n(n-2)\sigma_n} \|x\|_2^{2-n}$$

Dazu berechne ich zuerst die erste partielle Ableitung nach x_i. Damit offensichtlich wird, wie die Norm abzuleiten ist, ersetze ich diese erst durch die entsprechende Summe und Wurzel.

$$N(x) = \frac{1}{n(n-2)\sigma_n} \sqrt{\sum_i x_i^2}^{2-n}$$

Hier bietet es sich an die Wurzel und den Exponenten zusammenzufassen:

$$N(x) = \frac{1}{n(n-2)\sigma_n} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1-\frac{n}{2}}$$

Ich leite nach partiell nach x_i ab.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} N(x) = \frac{1-\frac{n}{2}}{n(n-2)\sigma_n} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}} 2x_i$$

Die Konstanten im Bruch vorne kann ich noch ein klein wenig vereinfachen.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} N(x) = \frac{-1}{2n\sigma_n} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}} 2x_i$$

Für die nächste Ableitung muss leider die Produktregel ran, dadurch entstehen zwei Summanden.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} N(x) = \frac{\frac{n}{2}}{2n\sigma_n} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} 4x_i^2 + \frac{-1}{2n\sigma_n} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}} 2$$

Dies kann ich noch etwas vereinfachen.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} N(x) = \frac{1}{\sigma_n} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} x_i^2 + \frac{-1}{n\sigma_n} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}}$$

Nun ersetze ich die Summe wieder durch die Definition der Norm.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} N(x) = \frac{1}{\sigma_n} \|x\|_2^{-n-2} x_i^2 - \frac{1}{n\sigma_n} \|x\|_2^{-n}$$

Die gleichen Terme kann ich noch ausklammern.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} N(x) = \frac{1}{\sigma_n} \|x\|_2^{-n} \left(\|x\|_2^{-2} x_i^2 - \frac{1}{n} \right)$$

Nun bilde ich noch die Summe über alle i.

$$\vec{\nabla}^2 N(x) = \sum_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} N(x) = \sum_i^n \frac{1}{\sigma_n} \|x\|_2^{-n} \left(\|x\|_2^{-2} x_i^2 - \frac{1}{n} \right)$$

Die Terme, die nicht von i abhängen, kann ich vor die Summe ziehen.

$$\vec{\nabla}^2 N(x) = \frac{1}{\sigma_n} \|x\|_2^{-n} \left(\|x\|_2^{-2} \sum_i^n x_i^2 - \sum_i^n \frac{1}{n} \right)$$

Diese erste Summe ist allerdings gerade die euklidische Norm zum Quadrat. Da bei der zweiten Summe der Summand nicht vom Index abhängt, ist dies eine Multiplikation mit n.

$$\vec{\nabla}^2 N(x) = \frac{1}{\sigma_n} \|x\|_2^{-n} \left(\|x\|_2^{-2} \|x\|_2^2 - 1 \right)$$

Mit einem γ-Blitz annihilieren sich die beiden Normen:

$$\vec{\nabla}^2 N(x) = \frac{1}{\sigma_n} \|x\|_2^{-n} (1 - 1)$$

Also:

$$\vec{\nabla}^2 N(x) = 0$$

Somit ist die Divergenz des Gradienten genau null.

Aufgabe 4 elliptisches Integral

Gegeben ist die Definiton des elliptischen Integrals zweiter Art.

Ich habe den Integranden in Abbildung 1 für verschiedene Werte von k geplottet.

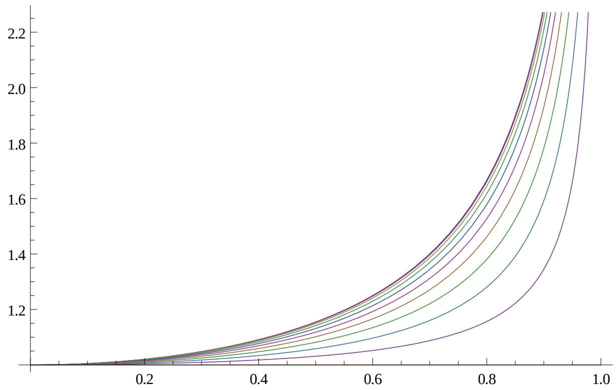

Abbildung 1: Integrand für k = {0, 0.1, ..., 1}

Aufgabe 4.a Konvergenz

Es soll gezeigt werden, dass dieses Integral konvergiert.

Ich gehe von dem gegebenen Integral aus:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} \, \mathrm{d}t$$

Anschließend substituiere ich mit $t = \sin(x)$ und $\mathrm{d}t = \cos(x) \, \mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin(x)^2}}{\sqrt{1 - \sin(x)^2}} \cos(x) \, \mathrm{d}x$$

Unter Benutzung der Identität $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ eliminiere ich den Nenner.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin(x)^2} \, \mathrm{d}x$$

Der Term $k^2 \sin(x)^2$ befindet sich für $k \in [0,1]$ und $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ immer in $[0,1]$, sodass der Radikant ebenfalls in $[0,1]$ liegt. Der ganze Integrant liegt somit in $[0,1]$, das Integral ist also endlich.

Aufgabe 4.b Bogenlänge der Ellipse

Es soll die Bogenlänge der Ellipse durch das elliptische Integral ausgedrückt werden.

Die Länge l einer Kurve s ist gegeben durch:

$$l = \int_s |\,\mathrm{d}s|$$

In diesem Fall ist die Kurve gegeben durch:

$$f(t) = (a\cos(t), b\sin(t))^T$$

Die Ableitung dieser Kurve ist:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = (-a\sin(t), b\cos(t))^T$$

Diese Gleichung nach $\mathrm{d}f$ aufgelöst und in das Integral eingesetzt ergibt:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin(t)^2 + b^2 \cos(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

Hier benutze ich wieder die Identität.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin(t)^2 + b^2 (1 - \sin(t)^2)} \, \mathrm{d}t$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin(t)^2 + b^2 - b^2 \sin(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

Dann ziehe ich noch das b^2 aus der Wurzel:

$$l = b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \sin(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

Dann vertausche ich die beiden Summanden in der Klammer:

$$l = b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

Das war allerdings gerade das elliptische Integral, nur wie in Aufgabe 4.a umgeformt. Somit kann ich das ganze auch schreiben als:

$$l = b \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} \, \mathrm{d}t$$

Oder mit E:

$$l = b \cdot E\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right)$$

Dies gilt natürlich nur für $a \leq b$, da sonst der Radiakant negativ wird. Allerdings ist es für den Umfang einer Ellipse egal, in welcher Reihenfolge man die kleine und große Halbachse angegeben wird. Falls also $b > a$, müssen diese einfach nur vertauscht werden, dann gilt die Formel für die Bogenlänge wieder. Für $b > a$ sieht die Formel also aus:

$$l = a \cdot E\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$

Aufgabe 5 Kurvenlänge

Es soll gezeigt werden, dass sich eine Kurve nach der Länge parametrisieren lässt.

Aufgabe 5.a Differentialgleichung

Es ist zu zeigen, dass diese Differentialgleichung gilt:

$$\phi'(x) = \frac{1}{g(\phi(x))}$$

Die Ableitung von $\phi(x)$ ist durch die Umkehrregel gegeben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G^{-1}(x + c) = \frac{1}{g(G^{-1}(x + c))}$$

Die Differentialgleichung ist damit offensichtlich erfüllt:

$$\phi'(x) = \frac{1}{g(G^{-1}(x + c))} = \frac{1}{g(\phi(x))}$$

Aufgabe 5.b das vorherige Problem

Hier fehlen noch Inhalte.

Literatur

[1] http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html