Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 3
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

25. April 2012

Aufgabe 1 Kompaktheit

Gegeben sind einige Mengen. Außerdem sind zwei Metriken und eine Topologie gegeben. Es soll herausgefunden werden, bezüglich welcher (induzierten) Topologien welche Mengen kompakt sind.

In der Aufgabenstellung wird die eine Topologie (ich nenne sie mal τ) über $\mathbb{R}$ mit Mengen der Form $\mathbb{R}\backslash F$, wobei F eine Menge mit $\operatorname{card}(F) < \aleph_0$ ist, definiert. Ich gehe davon aus, dass $\mathbb{R}$ hier symbolisch gemeint ist und die jeweilige Menge bezeichnen soll.

In einem Satz der Vorlesung wurde gezeigt, dass Kompaktheit bedeutet, dass die Menge beschränkt und vollständig ist. Wenn ich zeigen kann, dass eines davon nicht gilt, ist die Menge nicht mehr kompakt. Außerdem ist eine Menge nach Heine-Borel genau dann kompakt, wenn es für jede Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gibt.

Aufgabe 1.a Menge $\mathbb{R}$

euklidische Metrik Die Menge ist nicht beschränkt. Somit ist sie auch *nicht kompakt*.

triviale Metrik Eine mögliche Überdeckung ist die Vereinigung aller Teilmengen, die jeweils nur einen Punkt enthalten. Diese Mengen sind mit dieser Metrik offene Mengen. Da $\mathbb{R}$ allerdings überabzählbar viele Elemente enthält, gibt es für diese Überdeckung keine endliche Teilüberdeckung. Die Menge ist *nicht kompakt*.

Topologie τ Die Topologie hat nur Mengen, die aus fast allen Elementen der Menge bestehen. Da nur endlich viele Elemente fehlen können, braucht es nur endlich viele Mengen, um eine Teilüberdeckung zu bekommen.

Der Fall, dass in allen Teilmengen die gleiche Zahl fehlt kann nicht vorkommen, da die Vereinigung auch keine Überdeckung der ganzen Mengen gewesen wäre.

Die Menge ist *kompakt*.

Aufgabe 1.b Menge $\{1, ..., 2012\}$

euklidische Metrik Die offenen Mengen sind mindestens Mengen, die eine Zahl enthalten. Da es endlich viele von ihnen gibt, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Die Menge ist *kompakt*.

triviale Metrik Wie vorher auch, sind hier alle Mengen offen. Da die Menge endlich ist, gibt es zu jeder Überdeckung jedoch eine endliche Teilüberdeckung. Die Menge ist *kompakt*.

Topologie τ Wie vorher auch, lässt sich diese Menge mit endlich vielen Teilmengen überdecken. Die Menge ist *kompakt.*

Aufgabe 1.c Menge $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

euklidische Metrik Diese Menge ist nicht vollständig, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwar eine Cauchyfolge ist, jedoch der Grenzwert 0 nicht in der Menge liegt. Die Menge ist *nicht kompakt.*

triviale Metrik Da es undlich viele Elemente gibt, braucht es bei den kleinsten Teilmengen, die jeweils nur einen Punkt enthalten, unendlich viele. Die Menge ist *nicht kompakt.*

Topologie τ Hier sind wie vorher auch nur endlich viele Elemente in jeder Teilmenge nicht mit drin, somit ist die Menge *kompakt.*

Aufgabe 1.d Menge $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

euklidische Metrik Diese Menge ist beschränkt. Außerdem ist sie vollständig, da der Grenzwert 0 nun innerhalb der Menge ist. Somit ist sie *kompakt.*

triviale Metrik Es gibt wieder unendlich viele Elemente, somit ist die Menge *nicht kompakt.*

Topologie τ Wie vorher kann die Menge auch mit endlich vielen Teilmengen überdeckt werden, sie ist *kompakt.*

Aufgabe 1.e Menge $[2, 3)$

euklidische Metrik Die Folge $x_n = 3 - \frac{1}{n}$ hat einen Grenzwert 3, der außerhalb der Menge liegt. Die Menge ist also *nicht kompakt.*

triviale Metrik Da die triviale Metrik die feinste Topologie liefert, gibt es wieder keine endliche Teilüberdeckung. Die Menge ist *nicht kompakt.*

Topologie τ Da auch hier nur endlich viele Elemente fehlen dürfen, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Die Menge ist *kompakt.*

Aufgabe 1.f Menge $[3, 5]$

euklidische Metrik Eine Überdeckung wird 3 und 5 einschließen. Da die Überdeckungen offen sind, werden sie irgendwie überlappen, es gibt eine endliche Teilüberdeckung. Die Menge ist *kompakt.*

triviale Metrik Wieder gibt es unendlich viele Mengen mit je einem Punkt, die Menge ist *nicht kompakt.*

Topologie τ Da auch hier nur endlich viele Elemente fehlen dürfen, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Die Menge ist *kompakt.*

Zusammenfassung

Hier die Kompaktheit noch einmal in der Übersicht:

Menge	euklidische Metrik	triviale Metrik	Topologie τ
$\mathbb{R}$	✗	✗	✓
$\{1, ..., 2012\}$	✓	✓	✓
$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	✓	✗	✓
$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$	✓	✗	✓
$[2, 3)$	✗	✗	✓
$[3, 5]$	✓	✗	✓

Aufgabe 2 Metrik mit Unendlich

Es ist die Metrik d von einem vorherigen Aufgabenblatt gegeben. Es soll gezeigt werden, dass der Raum $(\overline{X}, d)$ kompakt ist.

Der Grenzwert $f(\infty)$ lässt sich auf 1 bestimmen. Somit gilt:

$$f(\infty) = 1$$

Nach dem Satz von Heine-Borel ist ein metrischer Raum genau dann kompakt, wenn er total beschränkt und vollständig ist.

Es ist zu zeigen, dass $(\overline{X}, d)$ total beschränkt ist. Dazu muss gezeigt werden, dass für jeses $\epsilon > 0$ endlich viele ϵ-Kugeln ausreichen, um den ganzen Raum zu bedecken.

Aufgabe 2.a totale Beschränktheit

Es ist zu zeigen, dass $(\overline{X}, d)$ total beschränkt ist. Dazu muss gezeigt werden, dass sich X für jedes $\epsilon > 0$ mit endlich vielen ϵ-Kugeln bezüglich d bedecken lässt.

$(\overline{X}, d)$ ist total beschränkt.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Ich beginne mit einer Kugel um den Punkt ∞:

$$B(\infty, \epsilon) = \left\{x \in \overline{X} : d(\infty, x) < \epsilon\right\}$$

Die Bedingung in der Menge lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned} d(\infty, x) &< \epsilon \\ |f(\infty) - f(x)| &< \epsilon \end{aligned}$$

Hier benutze ich die Definition von $f(\infty)$.

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{x}{1+x}\right| &< \epsilon \\ \left|1 - \frac{1+x-1}{1+x}\right| &< \epsilon \\ \left|\frac{1}{1+x}\right| &< \epsilon \end{aligned}$$

Da x nicht negativ sein kann, kann ich die Betragsstriche ohne Fallunterscheidung fallen lassen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &< \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} - 1 &< x \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass für jedes ausreichend kleine ϵ eine Zahl $x \in X$ exisitiert, so dass die ϵ-Kugel von dort bis ∞ alles einschließt. Es bleibt also ein beschränktes Interval ($diam = d(0, x)$) übrig. Dieses beschränkte Restinterval lässt sich mit der euklidischen Metrik mit endlich vielen Kugeln abdecken, mit der Metrik d erst recht.

Somit gibt es eine endliche Überdeckung mit ϵ-Kugeln, die Menge ist total beschränkt bezüglich d. □

Aufgabe 2.b Vollständigkeit

$(\overline{X}, d)$ ist vollständig.

Beweis. $[0, \infty)$ enthält bereits alle Grenzwerte für beschränkte Folgen. Einzig die Folgen, die gegen ∞ gehen, sind dort nicht enthalten. Folgen, die gegen ∞ gehen, zum Beispiel $x_n := n$, sind jetzt in diesem Raum enthalten:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : d(x_n, x) < \epsilon$$

Falls $x = \infty$, so muss mit den obigen Quantoren gelten:

$$\left| \frac{x_n}{1 + x_n} - f(\infty) \right| < \epsilon$$

Allerdings war $f(\infty) = 1$, so dass gilt:

$$\left| \frac{x_n}{1 + x_n} - f(\infty) \right| < \epsilon$$
$$\left| \frac{x_n}{1 + x_n} - 1 \right| < \epsilon$$

Ich addiere 0 ...

$$\left| \frac{1 + x_n - 1}{1 + x_n} - 1 \right| < \epsilon$$

... um den Bruch zu zerlegen.

$$\left| 1 + \frac{-1}{1 + x_n} - 1 \right| < \epsilon$$

Die -1 im Zähler verschwindet durch die Betragsstriche.

$$\left| \frac{1}{1 + x_n} \right| < \epsilon$$

Da (x_n) gegen ∞ geht, ist dies nach dem archimedischen Axiom erfüllbar. Die Folge (x_n) war allerdings gerade so angelegt. Somit ist der Raum vollständig. □

Damit ist $(\overline{X}, d)$ ein kompakter metrischer Raum.

Aufgabe 3 normierte Vektorräume

Es sind zwei normierte Vektorräume V und W gegeben. Es soll gezeigt werden, dass jede lineare Funktion f, die von V auf W abbildet, stetig ist.

Laut Satz 1.39 aus der Vorlesung ist eine lineare Funktion stetig, wenn gilt:

$$\exists c > 0 : \forall \vec{x} \in V : \|f(\vec{x})\|_W \leq c \cdot \|\vec{x}\|_V$$

Es ist zu zeigen, dass das gegebene f dies erfüllt.

Da V endlich erzeugt ist, können wir jeden Vektor $\vec{x} \in V$ als Element der lineare Hülle darstellen. Sei $\dim(V) = n, n \in \mathbb{N}$.

$\vec{x}$ kann mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $\vec{e}_i$, den Basisvektoren von V, dargestellt werden:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$$

Darüber hinaus definiere ich $c_i \in \mathbb{R}^+$ mit:

$$c_i \|\vec{e}_i\|_V = \|f(\vec{e}_i)\|_W$$

Sei $c := \max\{c_i\}$ das maximale Element.

Aus der Komponentendarstellung eines Homomorphismus folgt:

$$\|f(\vec{x})\|_W = \left\| \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i \vec{e}_i) \right\|_W$$

Die c_i waren gerade so definiert, dass f ersetzt werden kann. Dabei muss ich auch auf die andere Norm wechseln, da $\|\cdot\|_W$ nur für Bilder (da Bilder $\in W$) definiert ist und jetzt Urbilder betrachtet werden, die die Norm $\|\cdot\|_V$ (da Urbilder $\in V$) haben.

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \vec{e}_i \right\|_V$$

Ich ersetzen die kleineren c_i durch das maximale c.

$$\leq \left\| c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \right\|_V$$

Da $\|\cdot\|_W$ eine Norm ist, kann ich den Skalar c herausziehen.

$$= |c| \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \right\|_V$$

Und die Summe war gerade die Komponentendarstellung von x.

$$= |c| \cdot \|\vec{x}\|_V$$

Also erfüllt f das Kriterium aus dem Satz und ist somit stetig.

Aufgabe 4 stetig differentierbare Funktionen

Gegeben ist die Ableitungsfunktion D, die von $C^1([a,b])$ nach $C^0([a,b])$ abbildet. Es soll gezeigt werden, dass diese Funktion D bezürlich einer neu definierten Metrik $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ stetig ist.

Es ist zu zeigen, dass $\left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1([a,b])}\right)$ ein vollständiger normierter Vektorraum ist. Außerdem ist zu zeigen, dass die Abbildung D stetig ist.

Die Norm $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ induziert eine Metrik d auf den Vektorraum. Sei $x, y \in C^1([a,b])$:

$$d(x,y) = \|x-y\|_{C^1([a,b])}$$

Aufgabe 4.a $\left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1([a,b])}\right)$ ist vollständig

Es ist zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge gegen einen Punkt in $C^1([a,b])$ konvergiert.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1([a,b])$ eine Folge mit Grenzwert $f \in C^1([a,b])$. Das Cauchy-Kriterium besagt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \|f_n - f\|_{C^1([a,b])} < \epsilon$$

Es ist zu zeigen, dass die Grenzfunktion wieder in $C^1([a,b])$ liegt. Da die Norm über die Supremumsnorm definiert ist, handelt es sich hier um gleichmäßige Konvergenz. Ich wende die Definition der Metrik $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ an. Mit gleichen Quantoren wie oben gilt::

$$\|f_n - f\|_{C^0([a,b])} + \|f_n' - f'\|_{C^0([a,b])} < \epsilon$$

Die Norm $\|\cdot\|_{C^0([a,b])}$ ist die Supremumsnorm. Das obige bedeutet, dass f_n gleichmäßig gegen f und f_n' gleichmäßig gegen f' konvergiert. Da $f_n \in C^1([a,b])$ und $f_n' \in C^0([a,b])$ ist, sind die Folgenglieder stetig. Nach Satz 1.37 aus der Vorlesung ist die Grenzfunktion stetig, wenn es sich um eine Folge stetiger Funktionen handelt. Somit sind die Grenzwerte $f \in C^1([a,b])$ und $f' \in C^0([a,b])$. Der Raum $\left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1([a,b])}\right)$ ist also bezüglich der induzierten Norm $d(x,y)$ vollständig.

Aufgabe 4.b $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ ist eine Norm

Damit $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ eine Norm ist, müssen die Normaxiome gezeigt werden.

Null Sei $f \in C^1([a,b])$. Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\|f\|_{C^1([a,b])} = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Sei $f(x) = 0$ die Nullfunktion. Die Ableitung f' ist ebenfalls die Nullfunktion. Dann gilt:

$$\|f\|_{C^1([a,b])} = \|f\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])} = 0$$

Nun die andere Richtung. Sei $\|f\|_{C^1([a,b])} = 0$. Damit gilt auch, dass:

$$\|f\|_{C^1([a,b])} = \|f\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])} = 0$$

Die Funktion f darf also maximal 0 von 0 verschieden sein, sie muss die Nullfunktion sein.

Skalar Sei $f \in C^1([a,b])$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\|\lambda f\|_{C^1([a,b])} = |\lambda| \|f\|_{C^1([a,b])}$$

Beweis. Über die Definition von $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ folgt:

$$\|\lambda f\|_{C^1([a,b])} = \|\lambda f\|_{C^0([a,b])} + \|\lambda f'\|_{C^0([a,b])}$$

$\|\cdot\|_{C^0([a,b])}$ ist eine Norm, also erfüllt sie die Skalarmultiplikation.

$$\begin{aligned} &= |\lambda| \|f\|_{C^0([a,b])} + |\lambda| \|f'\|_{C^0([a,b])} \\ &= |\lambda| \left(\|f\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])} \right) \\ &= |\lambda| \|f\|_{C^1([a,b])} \end{aligned}$$

Somit gilt die Skalarmultiplikation □

Dreiecksungleichung Sei $f, g \in C^1([a,b])$. Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\|f+g\|_{C^1([a,b])} \leq \|f\|_{C^1([a,b])} + \|g\|_{C^1([a,b])}$$

Beweis. Auch hier nutze ich wieder aus, dass eine Norm zugrundeliegt.

$$\|f+g\|_{C^1([a,b])} = \|f+g\|_{C^0([a,b])} + \|(f+g)'\|_{C^0([a,b])}$$

Die Ableitung ist linear. Die Ableitung einer Summe ist also die Summe der Ableitungen.

$$= \|f+g\|_{C^0([a,b])} + \|f'+g'\|_{C^0([a,b])}$$

Hier benutze ich die Dreiecksungleichung der $\|\cdot\|C^0([a,b])$ Norm.

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_{C^0([a,b])} + \|g\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])} + \|g'\|_{C^0([a,b])} \\ &= \|f\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])} + \|g\|_{C^0([a,b])} + \|g'\|_{C^0([a,b])} \end{aligned}$$

Diese Terme lassen sich wieder zur $\|\cdot\|C^1([a,b])$ Norm zusammenfassen.

$$= \|f\|_{C^1([a,b])} + \|g\|_{C^1([a,b])}$$

□

Somit ist $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ eine Norm.

Aufgabe 4.c $C^1([a,b])$ ist ein Vektorraum

Um zu zeigen, dass $C^1([a,b])$ ein Vektorraum ist, muss ich alle Vektorraumaxiome zeigen.

Addition, neutrales Element Es existiert ein neutrales Element mit $0_{C^1([a,b])} := f(x) = 0$.

Addition, inverses Element Es existiert ein inverses Element mit $-f := (-f)(x) = -f(x)$.

Addition, Kommutativität Sei $f, g \in C^1([a,b])$. Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$(f+g)(x) = (g+f)(x)$$

Beweis.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

□

Addition, Assoziativität Sei $f, g, h \in C^1([a, b])$. Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$((f + g) + h)(x) = (f + (g + h))(x)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= (f + (g + h))(x)\end{aligned}$$

□

Skalarmultiplikation, neutrales Element Das neutrale Element ist $1_{C^1([a,b])} := \lambda = 1 \in \mathbb{R}$.

Skalarmultiplikation, inverses Element Das inverse Element ist $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$.

Distributivgesetz Sei $a, b \in \mathbb{R}$.Sei $f, g \in C^1([a, b])$. Es gilt:

$$(a(f + g))(x) = (af)(x) + (ag)(x)$$

Sowie anders herum:

$$((a + b)(f))(x) = (af)(x) + (bf)(x)$$

Aufgabe 4.d D ist stetig

Es ist zu zeigen, dass die Abbildung D stetig ist. Dies kann entweder über das ϵ-δ-Kriterium oder über die Linearität von D gezeigt werden.

ϵ-δ-Kriterium Mit dem ϵ-δ-Kriterium bedeutet dies:

$$\forall p \in C^1([a, b]) : \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in C^1([a, b]) : \|x-p\|_{C^1([a,b])} < \delta \Rightarrow \|D(x)-D(p)\|_{C^0([a,b])} < \epsilon$$

Ich betrachte nur die Implikation isoliert:

$$\|x - p\|_{C^1([a,b])} < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|D(x) - D(p)\|_{C^0([a,b])} < \epsilon$$

Ich setze die Definition der $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ Norm ein.

$$\|x - p\|_{C^0([a,b])} + \|x' - p'\|_{C^0([a,b])} < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|x' - p'\|_{C^0([a,b])} < \epsilon$$

Da $\|x - p\|_{C^0([a,b])} \geq 0$ gilt, wähle ich einfach $\delta := \epsilon$, damit ist die Folgerung oben immer erfüllt. Damit gilt das ϵ-δ-Kriterium und D ist stetig.

Linearität Laut Satz 1.39 aus der Vorlesung ist eine lineare Funktion stetig, wenn gilt:

$$\exists c > 0 : \forall \vec{x} \in V : \|f(\vec{x})\|_W \leq c \cdot \|\vec{x}\|_V$$

Die Ableitungsfunktion D ist linear. Das ist von den Ableitungsregeln bekannt.

Somit bleibt zu zeigen, dass ein c existiert. Mit den angegeben Normen bietet sich $c := 1$ an.

Beweis. Sei $x \in C^1([a,b])$, sei $c = 1$.

$$\|D(x)\|_{C^0([a,b])} \leq c \cdot \|x\|_{C^1([a,b])}$$

c war gerade auf 1 gesetzt.

$$\|D(x)\|_{C^0([a,b])} \leq \|x\|_{C^1([a,b])}$$

Ich setze die Definition der $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ Norm ein.

$$\|x'\|_{C^0([a,b])} \leq \|x\|_{C^0([a,b])} + \|x'\|_{C^0([a,b])}$$

Der Term $\|x'\|_{C^0([a,b])}$ fällt auf beiden Seiten weg.

$$0 \leq \|x\|_{C^0([a,b])}$$

Dies ist offensichtlich erfüllt, da $\|\cdot\|_{C^0([a,b])}$ eine Norm ist. □

Somit ist D eine stetige, lineare Funktion.

Aufgabe 4.e Normenäquivalenz unendlichdimensionaler Vektorräume

Normen sind immer dann äquivalent, wenn man $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ finden kann, so dass gilt:

$$\forall x : c_1\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq c_2\|x\|_A$$

In endlich-dimensionalen Vektorräumen sind alle Normen zueinander äquivalent, da die offenen Kugeln dann kompakte Mengen sind. Bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen lässt sich nicht direkt eine Äquivalenz annehmen, sie hängt von den Normen ab.

Aufgabe 5 kompakte Teilmengen

Es soll das Lebesgue Lemma bewiesen werden.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Es ist zu zeigen, dass zu jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ ein $\lambda > 0$ existiert, so dass für jede Teilmenge $A \subset K$, für die $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ gilt, bereits ein $U \in \mathcal{U}$ existiert, so dass $A \subset U$.

Beweis. Für jedes $k \in K$ existiert ein $U(k) \in \mathcal{U}$ mit $k \in U(k)$, da $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von K ist. Da die U jeweils offen sind, existiert ein $\epsilon(k) > 0$ sodass:

$$B_{\epsilon(k)}(k) \subseteq U(k)$$

Nun ist $\{B_{\epsilon(k)/2}(k) : k \in K\}$ eine Überdeckung von K und hat eine endliche Teilüberdeckung:

$$\{B_{\epsilon(k_1)/2}(k_1), \cdots, B_{\epsilon(k_n)/2}(k_n)\}$$

Ich setze λ auf:

$$\lambda = \frac{1}{2} \min\{\epsilon(k_1), \cdots, \epsilon(k_n)\}$$

Sei $A \subseteq K$ sodass $\operatorname{diam}(A) < \lambda$, und $a \in A$. Dann existiert ein $i \in \{1, \cdots, n\}$ sodass:

$$a \in B_{\epsilon(k_i)/2}(k_i)$$

Sei $b \in A$. Dann gilt:

$$d(b, k_i) \leq d(b, a) + d(a, k_i) < \lambda + \epsilon(k_i)/2 \leq \epsilon(k_i)$$

Also gilt:

$$b \in B_{\epsilon(k_i)}(k_i) \subseteq U(k_i)$$

Da $b \in A$ willkürlich gewählt werden kann, muss dies für alle b gelten. Daraus folgt, dass $A \subseteq U(x_i)$. Somit gilt der Satz. □