Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 2
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding*

22. April 2012

1 Aufgabe 1

1.1 $d_1 \times d_2$ ist Metrik

Als erstes zeige ich, dass $d_1 \times d_2$ eine Metrik definiert. Dazu zeige ich die drei Axiome.

Sei für den Rest dieses Abschnitts $x_i, y_i, z_i \in X_i$.

Null Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$d_1 \times d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

Beweis. $\Leftarrow$ **Richtung** Sei $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$. Da d_1 und d_2 je eine Metrik sind, erfüllen sie selbst dieses Axiom.

$$d_1 \times d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} = \max\{0, 0\} = 0$$

$\Rightarrow$ **Richtung** Sei $\max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} = 0$. Da d_1 und d_2 Metriken sind, die nicht negativ sein können, folgt daraus direkt, dass $d_1(x_1, y_1) = 0$ und $d_2(x_2, y_2) = 0$. Dies wiederum bedeutet, dass $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$.

Damit ist die Äquivalenz gezeigt. □

Symmetrie Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$d_1 \times d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1 \times d_2((x_2, y_2), (x_1, y_1))$$

Beweis. Da die d_i bereits Metriken sind, für die die Symmetrie gilt, gilt diese hier auch.

$$\begin{aligned} d_1 \times d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \\ &= \max\{d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2)\} \\ &= d_1 \times d_2((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \end{aligned}$$

□

Dreiecksungleichung Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$d_1 \times d_2((x_1, z_1), (x_2, z_2)) \leq d_1 \times d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_1 \times d_2((y_1, z_1), (y_2, z_2))$$

* mu@uni-bonn.de

Beweis. Die Metriken d_i haben ihrerseits bereits eine Dreiecksungleichung, die ich hier benutze. Außerdem erfüllt das Maximum die Dreiecksungleichung.

$$\begin{aligned}
d_1 \times d_2((x_1, z_1), (x_2, z_2)) &= \max\{d_1(x_1, z_1), d_2(x_2, z_2)\} \\
&\leq \max\{d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1), d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2)\} \\
&\leq \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} + \max\{d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2)\} \\
&= d_1 \times d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_1 \times d_2((y_1, z_1), (y_2, z_2))
\end{aligned}$$

□

1.2 offene Mengen

Sei U eine offene Teilmenge von X. Dann gilt:

$$\forall (x_1, x_2) \in U : \exists \epsilon > 0 : \{(a_1, a_2) \in U : d_1 \times d_2((a_1, x_1), (a_2, x_2)) < \epsilon\} \subset U$$

Die Bedingung betrachte ich jetzt isoliert:

$$d_1 \times d_2((a_1, x_1), (a_2, x_2)) < \epsilon$$

Aus der Definition der Metrik folgt:

$$\max\{d_1(a_1, x_1), d_2(a_2, x_2)\} < \epsilon$$

Da das Maximum der beiden Teile kleiner als ϵ ist, ist der andere Teil erst recht kleiner als ϵ. Somit folgt daraus:

$$d_1(a_1, x_1) < \epsilon \quad \vee \quad d_2(a_2, x_2) < \epsilon$$

Das kartesische Produkt U zerlege ich in zwei Teilmengen U_1 und U_2, so dass $U_1 \times U_2 = U$ gilt. Für das oben gewählte ϵ gelten auch die Bedingungen an jede Menge einzeln. Daher gilt dann auch:

$$\forall x_i \in U_i \exists \epsilon > 0 : \{a_i \in U_i : d_i(a_i, x_i) < \epsilon\} \subset U_i$$

Das obrige besagt, dass die Menge U_i offen ist. Somit ist die $\Rightarrow$ Richtung gezeigt.

Die $\Leftarrow$ Richtung funktioniert ähnlich.

Ich beginne mit zwei offenen Teilmengen U_i, die dann jeweils erfüllen:

$$\forall x_i \in U_i \exists \epsilon > 0 : \{a_i \in U_i : d_i(a_i, x_i) < \epsilon_i\} \subset U_i$$

Dann wähle ich $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Mit dem so gewählten ϵ gilt die Ungleichung für beide Teilmengen gleichzeitig:

$$d_1(a_1, x_1) < \epsilon \quad \vee \quad d_2(a_2, x_2) < \epsilon$$

Da beide Metriken einzeln die Bedingung erfüllen, wird es auch ihr Maximum tun:

$$\max\{d_1(a_1, x_1), d_2(a_2, x_2)\} < \epsilon$$

Dies ist allerdings genau die Definition der kombinierten Metrik. Ich bilde das kartesische Produkt der Menge. Ich erhalte alle Paare, die die kombinierte Bedingung erfüllen:

$$\forall (x_1, x_2) \in U \exists \epsilon > 0 : \{(a_1, a_2) \in U : d_1 \times d_2((a_1, x_1), (a_2, x_2)) < \epsilon\} \subset U$$

Dies ist eine offene Menge in X. Somit ist U genau dann offen, wenn alle U_i offen sind.

1.3 Stetigkeit der Projektion

Sei $O \in U_i$ eine offene Teilmenge. Damit π_i stetig ist, muss $\pi_i^{-1}[O]$ offen sein.

Sei also $O_1 \in U_i$ eine offene Teilmenge. Sei $O = O_1 \times O_2$ das Urbild $O = \pi_i^{-1}[O_1]$. Damit O offen ist, muss auch O_2 offen sein (siehe §

1.4 Konvergenz

Hier soll gezeigt werden, dass die nächsten beiden Aussagen äquivalent sind:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : d_1 \times d_2 \left((x_1, x_2)_n, (x_1, x_2) \right) < \epsilon$$

$$\forall i : \forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : d_i \left(x_{in}, x_i \right) < \epsilon$$

Beweis. Bei einer stetigen Funktion f gilt für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert x:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n \right) = f(x)$$

Nach Satz 1.18 aus der Vorlesung darf man den Limes aus einem Tupel ziehen, wenn die einzelnen Teile konvergieren:

$$\lim_{n \to \infty} (x_1, x_2)_n = \left(\lim_{n \to \infty} x_{1n}, \lim_{n \to \infty} x_{2n} \right) = (x_1, x_2)$$

Ist $x_i \in X_i$, ist die Äquivalenz damit gezeigt. $\square$

2 Aufgabe 2

Als Konvergenzkriterium benutze ich die Folgenstetigkeit. Damit f_N im Punkt x stetig ist, muss gelten:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : d\left(f_N(x_n), f_N(x) \right) < \epsilon$$

2.1 Konvergenz von f_N auf $\mathbb{N}$

Es ist zu entscheiden, ob die Funktion f_N auf $\mathbb{N}$ stetig ist. Ich behaupte, dass sie es nicht ist.

Beweis. Sei ein $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Sei $x \in X$ der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Damit f_N in x stetig ist, müsste gelten:

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : &\quad d\left(f_N(x_n), f_N(x) \right) < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : &\quad \frac{1}{f_N(x_n)} + \frac{1}{f_N(x)} < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : &\quad \frac{1}{f_N(x_n)} + \frac{1}{f_N(x)} < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : &\quad \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x} < \epsilon
\end{aligned}$$

Sobald ein $\epsilon < \frac{1}{x}$ vorgegeben wird, kann die Bedingung nicht mehr für fast alle n eingehalten werden, da beide Brüche positiv sind. Die Funktion ist in x nicht mehr stetig. Somit ist die Funktion in keinem Punkt stetig bezüglich der Metrik stetig. $\square$

2.2 Konvergenz von f_∞ auf $\mathbb{N} \cup \{P\}$

Es ist zu entscheiden, ob die Funktion f_∞ auf $\mathbb{N} \cup \{P\}$ stetig ist. Ich behaupte, dass sie nicht stetig ist.

Beweis. Zuerst die Stetigkeit für einem Punkt x aus $\mathbb{N}$. Sei $x \in X$ der Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && d\left(f_\infty(x_n), f_\infty(x)\right) < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && \frac{1}{f_\infty(x_n)} + \frac{1}{f_\infty(x)} < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && \frac{1}{f_\infty(x_n)} + \frac{1}{f_\infty(x)} < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x} < \epsilon
\end{aligned}$$

Egal, welches n_0 man wählt, es bleibt auf jeden Fall $\frac{1}{x}$ als untere Schranke für das ϵ, womit die Bedingung nicht für alle ϵ gelten kann. Die Funktion f_∞ ist daher nicht auf $\mathbb{N} \cup \{P\}$ stetig.

Der Punkt P ist auch nicht stetig:

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && d\left(f_\infty(x_n), f_\infty(P)\right) < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && \frac{1}{f_\infty(x_n)} + \frac{1}{f_\infty(P)} < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && \frac{1}{f_\infty(x_n)} + \frac{1}{f_\infty(P)} < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2012} < \epsilon \\
\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : && \frac{1}{x} + \frac{1}{2012} < \epsilon
\end{aligned}$$

Auch hier gibt es eine obere Schranke für das ϵ. Somit ist f_∞ in P nicht stetig.

Auf dem ganzen Definitionsbereich gesehen ist f_∞ nicht stetig. □

2.3 Funktion $g(x)$

Es soll entschieden werden, ob $g(x)$ stetig ist. Ich behaupte, dass die Funktion nicht stetig ist.

Beweis. Ich gehe davon aus, dass hier die normalen Zahlen mit der normalen Norm gebraucht werden.

Der einzige Punkt, der besonders bezüglich $\frac{1}{b}$ ist, ist $x = 0$. Eine Folge $(x_n) := \frac{1}{n}$ würde beliebig nahe an $x = 0$ kommen, ohne jedoch eine irrationale Zahl zu haben. An der Stelle 0 ist $g(0)$ allerdings 1, somit wäre es mit dieser Folge nicht stetig und es muss für alle Folgen gelten.

Eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ als Grenzwert könnte mit $x_n := z + \frac{1}{n} = \frac{zn+1}{n}$ erreicht werden. Jedoch ist $g(z) = 1$ der Funktionswert für jede solche Zahl. Der Grenzwert der Funktionswerte ist jedoch 0:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\left(z + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{zn+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 1 = g(z)$$

Somit ist g nicht in $\mathbb{Z}$ stetig.

g ist in ganz $\mathbb{R}$ nicht stetig. Dazu betrachte ich mit dem ϵ-δ-Kriterium eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:

$$\forall\epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \exists\delta > 0 : |x - r| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(r)| < \epsilon$$

In einer δ-Umgebung um einen Punkt $r \in \mathbb{R}$ sind jedoch immer reelle Zahlen enthalten, bei denen $g(r) = 0$ gilt, wobei jedoch $g(r) \neq 0$ bei rationalen Zahlen ist. Somit muss man ϵ mindestens $\frac{1}{b}$ groß sein, womit das Kriterium nicht für alle ϵ bei rationalen Zahlen erfüllt werden kann.

Die Funktion g ist in $\mathbb{R}$ unstetig. □

3 Aufgabe 3

3.1 Äquivalenz

Es ist zu zeigen: Die Metriken d_1 und d_2 sind äquivalent. Dazu muss gezeigt werden, dass sie die gleichen offenen Mengen definieren.

Dazu definiere ich zuerst k:

$$\begin{aligned}
d_2(x,y) &= k \cdot d_1(x,y) \\
\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| &= k \cdot |x-y| \\
\left|\frac{\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}}{x-y}\right| &= k \\
\left|\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right| &= k
\end{aligned}$$

Dieses k ist wohldefiniert und kleiner als 1, da x und y jeweils größer als 0 sind.

Daraus folgt:

$$k \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y)$$

Eine offene Kugel bezüglich d_2 ist eine also auch eine offene Kugel bezüglich d_1, da die Metrik d_2 ein stärkeres Kriterium stellt.

Eine offene Kugel bezüglich d_1 kann in eine offene Kugel bezüglich d_2 umgewandelt werden, wenn man den Radius mit k skaliert.

Somit definieren die beiden Metriken die gleichen offnen Mengen.

3.2 Unvollständigkeit

Es ist zu zeigen: (X, d_2) ist nicht vollständig.

Beweis. Dazu muss man eine Folge finden, die zwar bezüglich d_2 eine Cauchy-Folge ist, jedoch bezüglich d_2 nicht konvergiert. Die Konvergenz hängt von der Topologie ab, die hier allerdings gleich ist, wie in der ersten Teilaufgabe gezeigt. Das Cauchy-Kriterium hängt allerdings von der Metrik ab, die hier eben verschieden ist.

Als Folge nehmen ich $(x_n) = n$.

Für das Cauchy-Kriterium:

$$d_2(x_n, x_m) = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| = \left| \frac{n+1-1}{n+1} - \frac{m+1-1}{m+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \epsilon$$

Für ein ausreichend großes n_0 ist dies nach dem Archimedischen Axion erfüllbar, die Folge ist also eine Cauchy-Folge.

Die Folge konvergiert allerdings nicht bezüglich d_2.

Falls die Folge gegen x konvergieren würde, dann müsste gelten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} - \frac{x}{1+x} \right| = 0$$

Mit dem gleichen +0 Trick wie oben erhält man:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1+x} \right| = 0$$

Das bedeutet allerdings, dass $\frac{1}{1+x}$ auch gegen 0 gehen muss, was allerdings für kein x nicht möglich ist. Die Folge konvergiert also nicht. (X, d_2) ist unvollständig. □

4 Aufgabe 4

Es soll gezeigt werden, dass f stetig ist.

Für die Stetigkeit von f muss gelten:

$$\forall x \in X : \forall \epsilon > 0 : \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : d\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), f(x)\right) < \epsilon$$

Dabei kann man f einsetzen. Dann gilt mit den gleichen Quantoren:

$$d\left(\inf\left\{d(x_n, a) : a \in A\right\}, \inf\left\{d(x, a) : a \in A\right\}\right) < \epsilon$$

Je nach Lage von x kann man unterscheiden:

$x \in A$ Der Punkt x liegt in A. Damit ist der kleinste Abstand $d(x, a) = 0$ bei $x = a$. Wählt man n_0 so, dass alle Folgenglieder $x_n \in A$, so ist der Grenzwert direkt erreicht. Es gilt $0 < \epsilon$.

$x \notin A$ Der Punkt x liegt außerhalb von A. Somit beschreibt das $f(x)$ den Abstand zum nächsten Punkt aus der Menge A. n_0 wird so gewählt, dass alle Folgenglieder außerhalb von A liegen.

Es bleibt zu zeigen, dass f hier stetig ist.

5 Aufgabe 5

Um zu zeigen, dass (Y, d_H) ein metrischer Raum ist, zeige ich die drei Axiome für die Metrik.

Null Zu zeigen ist:

$$d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

Beweis. Zuerst zeige ich die $\Leftarrow$ Richtung:

Sei $A = B$. Somit sind die beiden Terme im Maximum gleich und ich brauche nur einen davon zu betrachten.

Das Infimum für ein gegebenes a ist immer 0, da ein b existiert, so dass $a = b$ gilt. Dadurch ist das Supremum der Inifma auch 0, und das Maximum damit auch.

Jetzt die $\Rightarrow$ Richtung:

Sei das Maximum 0. Somit sind beide Terme im Maximum auch 0. Wenn das Supremum 0 ist, so muss jedes Element auch 0 sein. Es treten keine negativen Elemente auf, da per Definition $d(a,b) \geq 0$ gilt. Die Infima sind also 0. Das bedeutet, dass es zu jedem a ein b gibt, so dass $d(a,b) = 0$, also $a = b$ gilt. Daraus folgt $A \subseteq B$.

Im anderen Maximumsterm sind die beiden Mengen vertauscht. Daraus folgt dann $B \subseteq A$.

Zusammen ergibt sich $A = B$.

Somit gilt die Behauptung in beide Richtungen. □

Symmetrie Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$d_H(A,B) = d_H(B,A)$$

Beweis.

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\left\{\inf_{b\in B}\{d(a,b)\}\right\}, \sup_{b\in B}\left\{\inf_{a\in A}\{d(a,b)\}\right\}\right\}$$

Das Maximum ist kommutativ.

$$= \max\left\{\sup_{b\in B}\left\{\inf_{a\in A}\{d(a,b)\}\right\}, \sup_{a\in A}\left\{\inf_{b\in B}\{d(a,b)\}\right\}\right\}$$

Die Metrik d ist, per Defintion, kommutativ.

$$\begin{aligned} &= \max\left\{\sup_{b\in B}\left\{\inf_{a\in A}\{d(b,a)\}\right\}, \sup_{a\in A}\left\{\inf_{b\in B}\{d(b,a)\}\right\}\right\} \\ &= d_H(B,A) \end{aligned}$$

Somit gilt die Symmetrie. □

Dreiecksungleichung Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} d_H(A,C) &= \max\left\{\sup_{a\in A}\left\{\inf_{c\in C}\{d(a,c)\}\right\}, \sup_{c\in C}\left\{\inf_{a\in A}\{d(a,c)\}\right\}\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{a\in A}\left\{\inf_{\substack{c\in C\\ b\in B}}\{d(a,b)+d(b,c)\}\right\}, \sup_{c\in C}\left\{\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}}\{d(a,b)+d(b,c)\}\right\}\right\} \end{aligned}$$

Die Menge B definiere ich so, dass sie nur ein Element enthält. Damit geht die Dreiecksungleichung immer über das gleiche Element und ich darf es aus dem Infimum herausziehen.

$$\leq \max\left\{\sup_{a\in A}\left\{\inf_{\substack{c\in C\\ b\in B}}\{d(a,b)\} + \inf_{\substack{c\in C\\ b\in B}}\{d(b,c)\}\right\}, \sup_{c\in C}\left\{\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}}\{d(a,b)\} + \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}}\{d(b,c)\}\right\}\right\}$$

Für das Supremum gilt die Dreiecksungleichung auf jeden Fall immer.

$$\begin{aligned}
&\leq \max\left\{\sup_{a\in A}\left\{\inf_{b\in B}\{d(a,b)\}\right\}, \sup_{b\in B}\left\{\inf_{a\in A}\{d(a,b)\}\right\}\right\} \\
&\quad + \max\left\{\sup_{b\in B}\left\{\inf_{c\in C}\{d(b,c)\}\right\}, \sup_{c\in C}\left\{\inf_{b\in B}\{d(b,c)\}\right\}\right\} \\
&= d_H(A,B) + d_H(B,C)
\end{aligned}$$

$\square$