Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math241.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math241/ gefunden werden.

[disclaimer]

math240 Übung 1
Tutorin: Inka Hammer

Martin Ueding*

11. April 2012

Aufgabe 1

Um zu zeigen, dass es ein sich bei $(\mathbb{R}, d)$ um einen metrischen Raum handelt, zeige ich die drei Axiome.

Null

$$d(x,x) = \arctan|x-x| = \arctan(0) = 0$$

Kommutativität

$$d(x,y) = \arctan|x-y| = \arctan|-(y-x)| = \arctan|y-x| = d(y,x)$$

Dreiecksungleichung Ich beginne mit der Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

Auf der größeren Seite addiere ich noch eine nicht-negative Zahl, damit bleibt die Ungleichung weiterhin erfüllt.

$$\begin{aligned}
|x-z| &\leq |x-y| + |y-z| + |x-y||y-z||x-z| \\
|x-z| - |x-y||y-z||x-z| &\leq |x-y| + |y-z| \\
|x-z| \cdot (1 - |x-y||y-z|) &\leq |x-y| + |y-z| \\
|x-z| &\leq \frac{|x-y| + |y-z|}{1 - |x-y||y-z|}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wende ich das Additionstheorem für den Tangens an: $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

$$\begin{aligned}
|x-z| &\leq \tan(\arctan|x-y| + |y-z|) \\
\tan(\arctan|x-z|) &\leq \tan(\arctan|x-y| + |y-z|)
\end{aligned}$$

Nun wende ich auf beiden Seiten den arctan() an.

$$\arctan|x-z| \leq \arctan|x-y| + |y-z|$$

Dies ist die gesuchte Dreiecksungleichung.

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

*mu@uni-bonn.de

Um zu zeigen, dass d die gleichen offenen Mengen wie $\tilde{d}$ definiert, definiere ich mir ein λ:

$$\forall r \in \mathbb{R} : \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda |r| = \arctan |r|$$

Dies wird erfüllt durch:

$$\lambda = \frac{\arctan |r|}{|r|}$$

Damit eine Menge X offen ist, muss $\forall B : B \subset X$ gelten.

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, d(a,x) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \arctan |a-x| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \lambda |a-x| < r\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \tilde{d}(a,x) < \frac{r}{\lambda}\right\} \\ &= \tilde{B}\left(a, \frac{r}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Für B lässt sich ein $\epsilon > 0$ finden, so dass $B(a,\epsilon) \subset X$ ist. Für $\tilde{B}(a, \frac{\epsilon}{\lambda}) \subset X$ erhält man die gleiche Teilmenge von X. Somit geben beide Metriken die gleichen offenen Mengen.

Aufgabe 2

Zuerst zeige ich, dass die Norm die Normaxiome erfüllt.

Null Wenn das Maximum der Funktion 0 ist, dann muss sie überall 0, also die Nullfunktion sein.

$$\forall x \in [0,1] : f(x) = 0 \Leftrightarrow \|f\|_X = 0$$

Skalar Das Maximum erfüllt die Skalarmultiplikation, somit erfüllt die Norm diese auch.

$$\|\lambda f\|_X = \max |\lambda f|$$

Dreiecksungleichung

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Um zu zeigen, dass es auch ein Vektorraum ist, müssen noch die Vektorraumaxiome gezeigt werden. Die stetigen Funktionen haben eine Addition mit $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, eine Skalarmultiplikation mit $\lambda f(x) = f(\lambda x)$ definiert. Es existiert eine 0_X mit $0_X(x) = 0$. Der Raum ist bezüglich dieser beiden Operationen abgeschlossen, kommutativ, assoziativ und erfüllt auch das Distributivgesetz.

Aufgabe 3

Da d bereits eine Metrik ist, ist es recht einfach zu zeigen, dass $\tilde{d}$ auch eine Metrik ist.

Null

$$\tilde{d}(x,x) = \frac{d(x,x)}{1 + d(x,x)} = \frac{0}{1} = 0$$

Kommutativität

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \tilde{d}(y,x)$$

Dreiecksungleichung Zuerst folgender Hilfssatz:

Satz 1 (Ungleichung mit Brüchen)**.**

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$$

Beweis. Sei $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ a + ab &\leq b + ab \\ a(1+b) &\leq b(1+a) \\ \frac{a}{1+a} &\leq \frac{b}{1+b} \end{aligned}$$

Somit gilt sogar $\forall a,b \in \mathbb{R} : a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$.

□

$$\tilde{d}(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}$$

Es gilt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Nach dem obigen Hilfssatz gilt dies auch für die Brüche.

$$\begin{aligned} \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \\ \tilde{d}(x,z) &\leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z) \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass d und $\tilde{d}$ die gleichen offenen Mengen definieren, reicht es auch hier aus zu zeigen, dass man zu jeder Metrik ein ϵ wählen kann, so dass die offene Kugel der einen Metrik in der offenen Kugel der anderen Metrik liegt. Dies wird gezeigt, in dem man zeigt, dass beide Metriken offene Werte liefern so dass man ein λ finden kann.

Aufgabe 4

Auch hier zeige ich wieder die Axiome für die Metrik.

Null

$$d(x,x) = \rho(x-x) = \rho(0) = 0$$

Kommutativität Hier nutze ich aus, dass $\rho(x) = \rho(-x)$ ist.

$$d(x,y) = \rho(x-y) = \rho(-(y-x)) = \rho(y-x) = d(y,x)$$

Dreiecksungleichung Die Metrik ρ bietet schon eine Dreiecksungleichung, die ich hier nutze.

$$d(x,z) = \rho(x-z) = \rho(x-y+y-z) \leq \rho(x-y) + \rho(y-z) = d(x,y) + d(y,z)$$

Satz 1.3 besagt, dass ein normierter Vektorraum mit $d : V \times V \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto \|x-y\|$ eine Metrik erhält. Die Abbildung d, die über die Frèchet-Metrik definiert ist, liefert so eine Abbildung. (X,ρ) ist bereits ein normierter Vektorraum. (X,d) ist ein metrischer Raum. Zusammen ist (X,d) also ein metrischer Vektorraum.

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}(\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B) &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \in \partial A \wedge (b \in B \vee b \in \partial B)\right\} \\ &\quad \cup \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (a \in A \vee a \in \partial A) \wedge b \in \partial B\right\} \\ &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (a \in \partial A \wedge (b \in B \vee b \in \partial B)) \vee ((a \in A \vee a \in \partial A) \wedge b \in \partial B)\right\} \\ &= \partial(A \times B)\end{aligned}$$