Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

„Mathematik für Physiker“ – Serie 13

Martin Ueding Paul Manz Tutor: Richard (Gruppe 14)

24. März 2012

Aufgabe 62a Wir bestimmen die ersten Ableitungen um die n-te Ableitung bestimmen zu können.

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (x-1)e^x \\
f^{(1)}(x) &= xe^x \\
f^{(2)}(x) &= (x-1)e^x \\
f^{(3)}(x) &= (x-2)e^x \\
f^{(4)}(x) &= (x-3)e^x
\end{aligned}$$

Wir erkennen das Schema für die n-te Ableitung.

$$f^{(n)}(x) = (x-1+n)e^x$$

Die n-te Ableitung, ausgewertet bei $x=0$, setzen wir in die Taylorformel ein.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^n$$

Wir wenden das Quotientenkriterium an.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{n}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{n-1}{n!} x^n} \right| = \left| \frac{1}{n-1} \right| |x|$$

Der Grenzwert dieser Folge ist 0. Somit erfüllt jedes x das Quotientenkriterum, der Konvergenzradius ist $R = \infty$.

Aufgabe 62b Hier bestimmen wir ebenfalls einige Ableitungen.

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
f^{(1)}(x) &= 2\frac{1}{(1-x)^3} \\
f^{(2)}(x) &= 6\frac{1}{(1-x)^4} \\
f^{(3)}(x) &= 24\frac{1}{(1-x)^5}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die n-te Ableitung.

$$f^{(n)}(x) = n!\frac{1}{(1-x)^{n+2}}$$

Diese Ableitung werten wir an der Stelle $x = 0$ aus.

$$f^{(n)}(0) = (n+1)!$$

Als Taylorreihe erhalten wir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Auf diese Reihe wenden wir das Quotientenkriterium an.

$$\left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} \right| = \left| \frac{n+1}{n} x \right| = \left| 1 + \frac{1}{n} \right| |x|$$

Gesucht ist ein $|x| \leq \theta < 1$. Somit muss $|x| < 1$ gelten. Der Konvergenzradius ist $R = |x|$.

Aufgabe 62c Auch hier versuchen wir das Schema zu erkennen, in dem wir einige Ableitungen bestimmen.

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= x^{\frac{1}{2}} \\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{3 \cdot 5}{16}x^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{32}x^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}
$$

...

Aufgabe 63 Wir bestimmen die Ableitungen.

$$\arctan^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

...

Daraus erhalten wir die recht einfache Taylorreihe:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2(n+1)+1} x^{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1} x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+3}\right| |x^2|$$

Der Grenzwert des Quotienten:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{2n+3} x^2\right| = |x^2|$$

Es muss ein θ mit $|x^2| \leq \theta < 1$ geben, somit muss $|x| < 1$ sein.

Der Konvergenzradius ist $R = 1$, allerdings konvergiert die Funktion *auf* dem Kreis selbst nicht.

...

Aufgabe 64a Wir bestimmen die erste und zweite Ableitung.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x}{n^2} \exp\left(-\frac{x}{n}\right) \\ f_n'(x) &= \frac{1}{n^3} \exp\left(-\frac{x}{n}\right)(n-x) \\ f_n''(x) &= \frac{1}{n^4} \exp\left(-\frac{x}{n}\right)(n-1) \end{aligned}$$

Wir setzen $f'(x) = 0$ um mögliche Extremstellen zu finden.

$$\frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n^3} \exp\left(-\frac{x}{n}\right)$$

Somit gibt es eine lokale Extremstelle bei $x = n$.

Wir setzen in die zweite Ableitung ein um die Art des Extremums zu finden und Sattelpunkte auszuschließen.

$$f_n''(n) = \frac{1}{n^4}\frac{1}{e}(n+1) < 0$$

Somit handelt es sich um ein lokales Maximum.

Für die globalen Maxima überprüfen wir das Verhalten bei $+\infty$. Das Verhalten bei $-\infty$ ist nicht notwendig, da die Funktion im negativen nicht definiert ist.

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$$

Die Exponentialfunktion konvergiert wächst schneller als linear, somit konvergiert $\frac{x}{e^x}$ gegen 0.

Damit ist $x = n$ das globale Maximum jeder Funktion $f_n(x)$.

Aufgabe 64b Das Maximum ist bei n, somit gilt:

$$|f_n(n)| = \sup\left(\{|f_n(x) - 0| \;:\; x \geq 0\}\right)$$

Somit müssen wir nur zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(n)| = 0.$$

Der Grenzwert folgt direkt aus dem archimedischen Axiom.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n^2}\frac{1}{e}\right| = 0$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig gegen 0.

Aufgabe 64c Das uneigentliche Integral bestimmen wir mit partieller Integration.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{n}\exp\left(-\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{n}\exp\left(-\frac{x}{n}\right)(-n)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{x}{n}\right)(-n)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-x\exp\left(-\frac{x}{n}\right)\right]_0^\infty + \left[\exp\left(-\frac{x}{n}\right)(-n)\right]_0^\infty \\
&= (0-0) + (0-(-n)) \\
&= n
\end{aligned}$$

Dabei kürzen wir mit $[F(x)]_0^\infty$ den Grenzwert $(\lim_{x\to\infty} F(x)) - F(0)$ ab.

Aufgabe 66a Eine allgemeine symmetrische 2×2 Matrix kann so aussehen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Wir berechnen das characteristische Polynom dieser Matrix.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda - b^2 + ac \end{aligned}$$

Die Lösungen für λ erhalten wir aus der PQ-Formel.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+c)^2}{4} + b^2 + ac} \\ \lambda &= \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + c^2}{4} + b^2 + ac} \\ \lambda &= \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + c^2}{4} + b^2} \\ \lambda &= \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(a-c)^2}{4} + b^2}_{\geq 0}} \end{aligned}$$

Da der Radikant nie negativ ist, erhalten wir nur reelle Nullstellen.

Aufgabe 66b $p_A(0)$ ist die Determinante von $A - 0E$, also $\det(A)$. Diese Determinante ist genau dann nicht 0, wenn die Matrix invertierbar ist, und somit die darstellende Matrix einer bijektiven linearen Abbildung (Isomorphismus) ist.

Aufgabe 67 Als erstes bestimmen wir das charakteristische Polynom.

$$\det(A - \lambda E) = (b - \lambda)(-6 + \lambda + \lambda^2)$$

Als Eigenwerte erhalten wir $-3, 2, b$.

Würden wir $b \neq 2 \wedge b \neq 3$ setzen, wären wir hier bereits fertig. Zu jedem Eigenwert gibt es einen Eigenvektor, die Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte sind linear unabhängig. Somit gibt es die benötigten drei linear unabhängigen Eigenvektoren.

Für die Fälle $b = -3$ und $b = 2$ müssten die Dimensionen der beiden verbleibenden Eigenräumen zusammen wieder drei ergeben, damit A diagonalisiert werden kann.

Fall $b = -3$ **Eigenwert** $\lambda = -3$

$$A_{b=-3} + 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für alle Werte von a erhalten wir zwei Nullzeilen, somit hat die Dimension des Eigenraums zwei.

Eigenwert $\lambda = 2$ Diesen Fall müssen wir nicht ausführen, da wir schon zwei Nullzeilen mit dem anderen Eigenwert haben.

Der Fall $b = -3$ ist damit auch für alle a zulässig.

Fall $b = 2$ **Eigenwert** $\lambda = 2$

$$A_{b=2} - 2E = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nur für $a = 0$ erhalten wir hier die benötigten zwei Nullzeilen.

Eigenwert $\lambda = -3$

$$A_{b=2} + 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 5 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2a & 5 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für alle a gibt es hier nur eine Nullzeile.

Somit lässt sich die Matrix nur für $a = 0$ diagonalisieren.

Die Matrix ist also diagonalisierbar, wenn gilt:

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad (b = 2 \wedge a = 0 \quad \vee \quad b \neq 2)$$