Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

56	57	58	59	60	61	Σ
6	6	5	4,5	3,5	0	25

„Mathematik für Physiker" – Serie 12

Martin Ueding
Paul Manz
Tutor: Richard (Gruppe 14)

18. Januar 2012

Aufgabe 56

Zeile/Spalte nach der entwickelt wird, angeben!

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(-1)(-1) - 2\cdot 3] - 1[(-1)2 - (-1)4]$$

$$= -12$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2[2(-3)1 + 2\cdot 1\cdot 1 - (-1)(-3)1] - 2[2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1] + [(-1)3(-3) - 2\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 2(-3)]$$

$$= 5$$

$\Sigma_{56} = 6$

Aufgabe 57 Zuerst der **Grenzwert**. Dazu setzen wir $f(x) := a^x = e^{x\log(a)}$.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = \log(a)$$

Die Unterteilung setzen wir auf $x_n := a^{\frac{k}{n}}$. Als Stützpunkte benutzen wir $\xi_k = x_k$. Somit ist unsere Riemannsche Summe:

$$\int_1^a \log(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \log(\xi_k)\Delta x_k\right)$$

Die Feinheit Δx_k ist $x_k - x_{k-1}$, also $a^{\frac{k-1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \log(x_k) a^{\frac{k-1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)$$

Wir vereinfachen und ziehen konstante Terme aus der Summe und gegebenfalls aus dem Limes.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(a^{-\frac{1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=1}^{n}\log(a^{\frac{k}{n}})a^{\frac{k}{n}}\right)\\
&= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(a^{-\frac{1}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}a^{\frac{k}{n}}\right)\\
&= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka^{\frac{k}{n}}\right)
\end{aligned}
$$

Einen Faktor $a^{\frac{1}{n}}$ ziehen wir aus der Summe heraus.

$$
= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{2}{n}}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{k-1}\right)
$$

Ab hier setzen wir $q := a^{\frac{1}{n}}$.

$$
= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(q^2\frac{q-1}{n}\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}\right)
$$

Wir integrieren die Summe summandenweise, dafür leiten wir diese später wieder ab. Auf diesem Wege werden wir das k in der Summe los und können im nächsten Schritt die Summe auflösen.

$$
= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(q^2\frac{q-1}{n}\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=0}^{n}q^{k}\right)
$$

Wir benutzen die Formel für den (Grenz)wert der geometrischen Reihe.

$$
= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(q^2\frac{q-1}{n}\frac{\partial}{\partial q}\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)
$$

Jetzt leiten wir ab, um die Integration von vorhin rückgängig zu machen.

$$
\begin{aligned}
&= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(q^2\frac{q-1}{n}\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(q-1)^2}\right)\\
&= \log(a)\lim_{n\to\infty}\left(q^2\frac{q^{n+1}-(1+\frac{1}{n})q^n+\frac{1}{n}}{q-1}\right)
\end{aligned}
$$

Hier setzen wir a wieder ein. Dabei ändern wir die Folge von $n\to\infty$ auf $x\to 0$, was nach dem Archimedischen Axiom möglich ist.

$$
= \log(a)\lim_{x\to 0}\left(a^{2x}\frac{a^xa-(1+x)a+x}{a^x-1}\right)
$$

Der Term a^{2x} wird gegen 1 gehen.

$$
\begin{aligned}
&= \log(a)\lim_{x\to 0}\left(a^{2x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^xa-(1+x)a+x}{a^x-1}\right)\\
&= \log(a)\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^xa-(1+x)a+x}{a^x-1}\right)
\end{aligned}
$$

Ihr hättet vielleicht etwas deutlicher machen können, dass der Term überhaupt die nötige Form hat.

An dieser Stelle benutzen wir den Grenzwert, den wir vorher hergeleitet haben.

$$= \log(a) \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x a \log a - a + 1}{a^x \log a} \right)$$

Auch hier gehen die a^x gegen 1.

$$\begin{aligned} &= \log(a) \left(\frac{a \log a - a + 1}{\log a} \right) \\ &= a \log(a) - a + 1 \end{aligned}$$

$\Sigma_{57} = 6$

Aufgabe 59a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{-x^2} \\ f'(x) &= 2xe^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} 2x = e^{-x^2}(2x - 2x^3) \\ f''(x) &= e^{-x^2}(2 - 6x^2) + e^{-x^2}(4x^4 - 4x^2) = e^{-x^2}(2 - 10x^2 + 4x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 2x^3 &= 0 \\ x(1 - x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Als Nullstellen kommen $x \in \{-1, 0, 1\}$ in Frage.

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
0	0	2	Minimum
1	$\frac{1}{e}$	$-\frac{4}{e}$	Maximum
-1	$\frac{1}{e}$	$-\frac{4}{e}$	Maximum

2

Aufgabe 59b

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^5(e^x - 1)} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^{10}(e^x - 1)^2}(5x^4(e^x - 1) + x^5(e^x - 1)) \\ f'(x) &= -\frac{5(e^x - 1) + xe^x}{x^6(e^x - 1)^2} \\ f'(x) &= -\frac{e^x(5 + x) - 5}{x^6(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitung gleich Null, um die möglichen Nullstellen zu erhalten.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{e^x(5 + x) - 5}{x^6(e^x - 1)^2} &= 0 \\ e^x(5 + x) - 5 &= 0 \\ xe^x + 5e^x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung, die wir erkennen können ist $x = 0$. Allerdings ist die Funktion dort nicht definiert. Somit hat diese Funktion keine normalen lokalen Extremstellen. ?

Aufgabe 59c

$$f(x) = \arctan(2\cos(x)) - x$$

Die Ableitung des Arcustangens ist $\frac{1}{1+x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (2\cos(x))^2} 2(-\sin(x)) - 1 = \frac{-2\sin(x)}{1 + 4\cos(x)^2} - 1$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Nullstellen zu erhalten.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{-2\sin(x)}{1+4\cos(x)^2} - 1 &= 0 \\
\frac{-2\sin(x)}{1+4\cos(x)^2} &= 1 \\
-2\sin(x) &= 1 + 4\cos(x)^2 \\
-2\sin(x) &= 1 + 4 - 4\sin(x)^2 \\
-5 + 4\sin(x)^2 - 2\sin(x) &= 0 \\
\sin(x)^2 - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{5}{4} &= 0 \\
\sin(x) &= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{20}{16}} \\
\sin(x) &= \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{21}}{4}
\end{aligned}$$

Über den Zwischenwertsatz können wir sehen, dass dies wirklich eine Nullstelle ist, so müssen wir die zweite Ableitung nicht bestimmen. Als Lösungen für x erhalten wir im reellen nur $-1{,}11$. $f(-1{,}11) = 1{,}83688$. wirklich? $+2k\pi$ Was ist das nun? Min. oder Max.?

$\frac{1}{2}$ $\Sigma_{59} = 4{,}5$

Aufgabe 60 Hierbei handelt es sich um eine *lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.* In diesem Fall passt die Normalform

$$y''(t) + \underbrace{2d}_{p} y'(t) + \underbrace{k}_{q} y(t) = 0.$$

Als Ansatz wählen wir

$$\begin{aligned}
y(t) &= \hat{y}e^{\lambda t} \\
y'(t) &= \hat{y}\lambda e^{\lambda t} \\
y''(t) &= \hat{y}\lambda^2 e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein.

$$\begin{aligned}\hat{y}\lambda^2 e^{\lambda t} + 2d\hat{y}\lambda e^{\lambda t} + k\hat{y}e^{\lambda t} &= 0\\ \lambda^2 e^{\lambda t} + 2d\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} &= 0\\ \lambda^2 + 2d\lambda + k &= 0\\ \lambda &= -d \pm \sqrt{d^2 - k}\end{aligned}$$

Für den Fall $d^2 > k$ sind beide Lösungen reell.

Es gibt viel mehr, nämlich alle Linearkombis davon...

$$\mathbb{L}_{d^2>k} = \left\{\hat{y}e^{\left(-d+\sqrt{d^2-k}\right)t}, \hat{y}e^{\left(-d-\sqrt{d^2-k}\right)t}\right\}$$

1,5

Für den Fall $d^2 = k$ sind beide Lösungen reell und gleich, die Lösungsmenge enthält nur noch ein Element.

$$\mathbb{L}_{d^2=k} = \left\{\hat{y}e^{-dt}\right\}$$

te^{-dt} ...

1

Für den Fall $d^2 < k$ erhalten wir nicht direkt eine reelle Lösung.

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{d^2<k} &= \left\{\Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm \sqrt{\underbrace{d^2-k}_{<0}}\right)t\right]\right)\right\}\\ &= \left\{\Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm \sqrt{-\underbrace{(k-d^2)}_{>0}}\right)t\right]\right)\right\}\\ &= \left\{\Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm i\sqrt{k-d^2}\right)t\right]\right)\right\}\\ &= \left\{\Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm i\sqrt{k-d^2}\right)t\right]\right)\right\}\end{aligned}$$

Da nur die reellen Lösungen gefragt sind, kann man hier den Sinus weglassen.

$$= \left\{\hat{y}\cdot e^{-dt}\cdot\cos\left(\pm\sqrt{k-d^2}t\right)\right\}$$

Im... wäre auch eine Lösung...

Wir nutzen die Achsensymmetrie des Kosinus.

$$= \left\{\hat{y}\cdot e^{-dt}\cdot\cos\left(\sqrt{k-d^2}t\right)\right\}$$

1

$\Sigma_{60} = 3{,}5$

Aufgabe 58

a)

zz: $\sin(x) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

$$\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Additionstheorem

$$= \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin(x) \quad \square$$

zz

$$\cos(x) = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \qquad \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Additionstheorem

$$= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos(x)$$

$\square$ 3

b)

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

substituiere $x = 2\arctan(u)$

$$\Rightarrow \int \frac{\cancel{1+u^2}}{\cancel{2}\,u} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{u^2+1}}\,du$$

$$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln u = \ln \tan\frac{x}{2}$$

Was ist mit $x<0$?

$\cancel{x \neq (1+2k)\cdot 2\pi \quad k\in\mathbb{Z}}$

$\cancel{x \neq 4k\pi}$

$x \notin [(2k+1)\pi, 2k\pi] \quad k\in\mathbb{Z}$

b) II

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \int \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$$

substituiere $x = 2\arctan(u)$

$$\Rightarrow \int \frac{\cancel{1+u^2}}{1-u^2} \cdot \frac{2}{\cancel{u^2+1}}\, du$$

$$= \int \frac{2}{1-u^2}\, du$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{2}{1-u^2} = \frac{a_1}{1+u} + \frac{a_2}{1-u}$$

$$2 = a_1(1-u) + a_2(1+u)$$

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\, du$$

$$= \int \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\, du$$

$$= \ln u+1 - \ln u-1$$

$$= \ln \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1}$$

$\Sigma_{58} = 5$

$\cancel{x \in \left[(4k+1)\frac{\pi}{2},\right.}$

$x \notin \left[(4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

$x \neq (2k+1)\pi$