Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

„Mathematik für Physiker“ – Serie 12

Martin Ueding
Paul Manz
Tutor: Richard (Gruppe 14)

20. Januar 2012

Aufgabe 56

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2[(-1)(-1) - 2 \cdot 3] - 1[(-1)2 - (-1)4]$$
$$= -12$$
$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2[2(-3)1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-1)(-3)1] - 2[2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1] + [(-1)3(-3) - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2(-3)]$$
$$= 5$$

Aufgabe 57 Zuerst der **Grenzwert**. Dazu setzen wir $f(x) := a^x = e^{x \log(a)}$.

$$\lim_{n\to\infty} n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = \log(a)$$

Die Unterteilung setzen wir auf $x_n := a^{\frac{k}{n}}$. Als Stützpunkte benutzen wir $\xi_k = x_k$. Somit ist unsere Riemannsche Summe:

$$\int_1^a \log(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \log(\xi_k) \Delta x_k \right)$$

Die Feinheit Δx_k ist $x_k - x_{k-1}$, also $a^{\frac{k-1}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \log(x_k) a^{\frac{k-1}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \right)$$

Wir vereinfachen und ziehen konstante Terme aus der Summe und gegebenfalls aus dem Limes.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \left(a^{-\frac{1}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sum_{k=1}^{n} \log(a^{\frac{k}{n}}) a^{\frac{k}{n}} \right) \\
&= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(a^{-\frac{1}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} a^{\frac{k}{n}} \right) \\
&= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a^{\frac{k}{n}} \right)
\end{aligned}
$$

Einen Faktor $a^{\frac{1}{n}}$ ziehen wir aus der Summe heraus.

$$
= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(a^{\frac{2}{n}} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^{k-1} \right)
$$

Ab hier setzen wir $q := a^{\frac{1}{n}}$.

$$
= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(q^2 \frac{q-1}{n} \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} \right)
$$

Wir integrieren die Summe summandenweise, dafür leiten wir diese später wieder ab. Auf diesem Wege werden wir das k in der Summe los und können im nächsten Schritt die Summe auflösen.

$$
= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(q^2 \frac{q-1}{n} \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=0}^{n} q^k \right)
$$

Wir benutzen die Formel für den Grenzwert der geometrischen Reihe.

$$
= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(q^2 \frac{q-1}{n} \frac{\partial}{\partial q} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)
$$

Jetzt leiten wir ab, um die Integration von vorhin rückgängig zu machen.

$$
\begin{aligned}
&= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(q^2 \frac{q-1}{n} \frac{n q^{n+1} - (n+1) q^n + 1}{(q-1)^2} \right) \\
&= \log(a) \lim_{n\to\infty} \left(q^2 \frac{q^{n+1} - (1 + \frac{1}{n}) q^n + \frac{1}{n}}{q - 1} \right)
\end{aligned}
$$

Hier setzen wir a wieder ein. Dabei ändern wir die Folge von $n \to \infty$ auf $x \to 0$, was nach dem Archimedischen Axiom möglich ist.

$$
= \log(a) \lim_{x\to 0} \left(a^{2x} \frac{a^x a - (1+x) a + x}{a^x - 1} \right)
$$

Der Term a^{2x} wird gegen 1 gehen.

$$
\begin{aligned}
&= \log(a) \lim_{x\to 0} \left(a^{2x} \right) \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x a - (1+x) a + x}{a^x - 1} \right) \\
&= \log(a) \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x a - (1+x) a + x}{a^x - 1} \right)
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle benutzen wir den Grenzwert, den wir vorher hergeleitet haben.

$$= \log(a) \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x a \log a - a + 1}{a^x \log a} \right)$$

Auch hier gehen die a^x gegen 1.

$$\begin{aligned} &= \log(a) \left(\frac{a \log a - a + 1}{\log a} \right) \\ &= a \log(a) - a + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 59a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{-x^2} \\ f'(x) &= 2xe^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} 2x = e^{-x^2}(2x - 2x^3) \\ f''(x) &= e^{-x^2}(2 - 6x^2) + e^{-x^2}(4x^4 - 4x^2) = e^{-x^2}(2 - 10x^2 + 4x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 2x^3 &= 0 \\ x(1 - x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Als Nullstellen kommen $x \in \{-1, 0, 1\}$ in Frage.

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
0	0	2	Minimum
1	$\frac{1}{e}$	$-\frac{4}{e}$	Maximum
-1	$\frac{1}{e}$	$-\frac{4}{e}$	Maximum

Aufgabe 59b

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^5(e^x - 1)} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^{10}(e^x - 1)^2}(5x^4(e^x - 1) + x^5 e^x) \\ f'(x) &= -\frac{5(e^x - 1) + xe^x}{x^6(e^x - 1)^2} \\ f'(x) &= -\frac{e^x(5 + x) - 5}{x^6(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Wir setzen die Ableitung gleich Null, um die möglichen Nullstellen zu erhalten.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{e^x(5 + x) - 5}{x^6(e^x - 1)^2} &= 0 \\ e^x(5 + x) - 5 &= 0 \\ xe^x + 5e^x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Die einzige Lösung, die wir erkennen können ist $x = 0$. Allerdings ist die Funktion dort nicht definiert. Somit hat diese Funktion keine normalen lokalen Extremstellen.

Aufgabe 59c

$$f(x) = \arctan(2\cos(x)) - x$$

Die Ableitung des Arcustangens ist $\frac{1}{1+x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2\cos(x))^2} 2(-\sin(x)) - 1 = \frac{-2\sin(x)}{1+4\cos(x)^2} - 1$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Nullstellen zu erhalten.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{-2\sin(x)}{1+4\cos(x)^2} - 1 &= 0 \\
\frac{-2\sin(x)}{1+4\cos(x)^2} &= 1 \\
-2\sin(x) &= 1 + 4\cos(x)^2 \\
-2\sin(x) &= 1 + 4 - 4\sin(x)^2 \\
-5 + 4\sin(x)^2 - 2\sin(x) &= 0 \\
\sin(x)^2 - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{5}{4} &= 0 \\
\sin(x) &= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{20}{16}} \\
\sin(x) &= \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{21}}{4}
\end{aligned}$$

Über den Zwischenwertsatz können wir sehen, dass dies wirklich eine Nullstelle ist, so müssen wir die zweite Ableitung nicht bestimmen. Als Lösungen für x erhalten wir im reellen nur $-1{,}11$. $f(-1{,}11) = 1{,}83688$.

Aufgabe 60 Hierbei handelt es sich um eine *lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. In diesem Fall passt die Normalform

$$y''(t) + \underbrace{2d}_{p} y'(t) + \underbrace{k}_{q} y(t) = 0.$$

Als Ansatz wählen wir

$$\begin{aligned}
y(t) &= \hat{y}e^{\lambda t} \\
y'(t) &= \hat{y}\lambda e^{\lambda t} \\
y''(t) &= \hat{y}\lambda^2 e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein.

$$\begin{aligned}
\hat{y}\lambda^2 e^{\lambda t} + 2d\hat{y}\lambda e^{\lambda t} + k\hat{y}e^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda^2 e^{\lambda t} + 2d\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda^2 + 2d\lambda + k &= 0 \\
\lambda &= -d \pm \sqrt{d^2 - k}
\end{aligned}$$

Für den Fall $d^2 > k$ sind beide Lösungen reell.

$$\mathbb{L}_{d^2>k} = \left\{ \hat{y}e^{\left(-d+\sqrt{d^2-k}\right)t}, \hat{y}e^{\left(-d-\sqrt{d^2-k}\right)t} \right\}$$

Für den Fall $d^2 = k$ sind beide Lösungen reell und gleich, die Lösungsmenge enthält nur noch ein Element.

$$\mathbb{L}_{d^2=k} = \left\{ \hat{y}e^{-dt} \right\}$$

Für den Fall $d^2 < k$ erhalten wir nicht direkt eine reelle Lösung.

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{d^2<k} &= \left\{ \Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm \sqrt{\underbrace{d^2 - k}_{<0}} \right) t \right] \right) \right\} \\
&= \left\{ \Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm \sqrt{-(\underbrace{k - d^2}_{>0})} \right) t \right] \right) \right\} \\
&= \left\{ \Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm i\sqrt{k - d^2} \right) t \right] \right) \right\} \\
&= \left\{ \Re\left(\hat{y}\exp\left[\left(-d \pm i\sqrt{k - d^2} \right) t \right] \right) \right\}
\end{aligned}$$

Da nur die reellen Lösungen gefragt sind, kann man hier den Sinus weglassen.

$$= \left\{ \hat{y} \cdot e^{-dt} \cdot \cos\left(\pm\sqrt{k - d^2}t \right) \right\}$$

Wir nutzen die Achsensymmetrie des Kosinus.

$$= \left\{ \hat{y} \cdot e^{-dt} \cdot \cos\left(\sqrt{k - d^2}t \right) \right\}$$