Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

Mathematik für Physiker, Serie 11

Martin Ueding
Paul Manz

11. Januar 2012

51	52	53	54	55	Σ
6	5,5	6	5	6	28,5

Aufgabe 51 Die Eigenräume sind die Kerne der Matrizen $A + E$ und $A - 2E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.

Man löst nun für die Matrix A und den Eigenwert $\lambda = -1$ das entsprechende homogene Gleichungssystem:

$$A + E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass y beliebig gewählt werden kann und $x = z = 0$. Somit ist eine Basis dieses Kerns (und damit des Eigenraums für $\lambda = -1$)

$$B_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad \checkmark$$

Für den zweiten Eigenwert $\lambda = 2$ geht man analog vor.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass x beliebig ist und $y = z = 0$. Eine Basis dieses Eigenraums ist

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad \checkmark$$

Für die zweite Matrix geht man genauso vor. Eigenwert $\lambda = -1$:

$$B + E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass z beliebig, $x = \frac{7}{4}z$ und $y = -\frac{3}{2}z$. Eine Basis ist

$$B_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der zweite Eigenwert $\lambda = 2$:

$$B - 2E = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist y und z beliebig, $x = z$. Eine Basis ist somit

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$ ✓

$\Sigma_{51} = 6$

Aufgabe 52 Die Matrix C ist diagonalisierbar, falls einer der 3 Eigenwerte ($\lambda \in \{-1, 0, 1\}$) die geometrische Vielfachheit 2 hat. Dies ist nötig, um auf 4 linear unabhängige Eigenvektoren zu kommen. Ansonsten würde es nur 3 linear unabhängige Eigenvektoren geben, die allerdings nicht ausreichen, um eine 4×4 Matrix zu diagonalisieren.

Man bestimmt nun die Dimension der Eigenräume der jeweiligen Eigenwerte. Diese Dimensionen sind die Defekte der Matrizen $C - \lambda E$.

Beginne mit $\lambda = 1$, also $C - E$:

$$C - E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt in dieser Zeilenstufenform nur eine Nullzeile. Somit ist der Defekt nur 1 und die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 1$ ist nur 1. Eventuell gibt es einen anderen Eigenwert doppelt.

Löse $C - 0E$ (für $\lambda = 0$):

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch hier gibt es wieder nur eine Nullzeile, somit entscheidet der letzte Eigenwert $\lambda = -1$:

$$C+E=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\-2&4&0&0\\-2&0&-2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&2&0\\1&-2&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&-2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Wieder nur eine Nullzeile. Somit gibt es nur 3 linear unabhängige Eigenvektoren, da die geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte zusammen nur 3 ist. Daher ist die Matrix C *nicht* diagonalisierbar. Ihr hättet ruhig die geometrische Vielfachheit für 0, −1 hinschreiben können.

$\Sigma_{52} = 5{,}5$

Aufgabe 53 Da hier nur *eine* Stammfunktion gefunden werden soll, setzen wir in allen folgenden Teilaufgaben $C = 0$.

D_f und D_F bezeichnen die Definitionsmenge von Funktion beziehungsweise Stammfunktion.

Aufgabe 53a Zuerst muss eine Polynomdivision durchgeführt werden, damit der rationale Term in Partialbrüche zerlegbar ist. Dazu teilt man Zähler durch Nenner. Nach dem ersten Divisionsvorgang ist das Restpolynom von kleinerem Grad als der Divisor, somit gibt es einen Rest. Diesen Rest (-14) lässt man dann auf dem Nenner stehen.

$$\begin{aligned}F &= \int \frac{-x^2+x-2}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-x^2+x+12-14}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-(x^2-x-12)-14}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x\\ &= \int -1 + \frac{-14}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}x + \int \frac{-14}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Als nächstes wird der verbleibende Bruch in Partialbrüche zerlegt. Dazu bestimmt man A und B so, dass beim Gleichnamigmachen und Addieren der Brüche der ursprüngliche Bruch herauskommt.

$$\begin{aligned}\frac{-14}{x^2-x-12} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-4}\\ \frac{-14}{x^2-x-12} &= \frac{A(x-4)}{x^2-x-12} + \frac{B(x+3)}{x^2-x-12}\\ -14 &= A(x-4) + B(x+3)\\ 0 &= x(A+B) + (-4A+3B+14)\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle x gelten muss, folgt daraus, dass die Klammern jeweils 0 sein müssen.

$$A+B=0 \quad \wedge \quad -4A+3B+14=0$$

Löst man nun beide Gleichungen miteinander auf, erhält man $A = 2$ und $B = -2$. Das obige Integral kann nun in Partialbrüche aufgeteilt werden.

$$F = -\int \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$$

Die Integrale kann man mit der Regel $\int \frac{1}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = \log|x-x_0|$ lösen.

$$= -x + 2\log|x+3| - 2\log|x-4|$$

1

$$D_f = D_F = \mathbb{R}\backslash\{-3,4\}$$

Aufgabe 53b

$$\begin{aligned}
F &= \int x \log(1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 \log\left(1-x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1-x^2}(-2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 \log\left(1-x^2\right) + \int \frac{x^3}{1-x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Hier führt man eine Polynomdivision des Integranden durch, damit man im nächsten Schritt sinnvoll substituieren kann.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^2 \log\left(1-x^2\right) + \int -x + \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 \log\left(1-x^2\right) - \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Jetzt substiuiert man im letzten Integranden durch $z \equiv 1-x^2$, $\mathrm{d}z = -2x\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^2 \log\left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 \log\left(1-x^2\right) - x^2 - \log(z)\right)
\end{aligned}$$

Man substituiert zurück.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(x^2 \log\left(1-x^2\right) - x^2 - \log\left(1-x^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\log\left(1-x^2\right)\left(x^2-1\right) - x^2\right)
\end{aligned}$$

1

$$D_f = D_F = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$$

Aufgabe 53c

$$F = \int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x = e^x\,(-1+x)$$

1

$$D_f = D_F = \mathbb{R}$$

Aufgabe 53d

$$F = \int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Hier bringt es wenig, direkt partielle Integration zu benutzen. Man müsste die beiden Teilfunktionen so wählen, dass man x^3 (in mehreren Schritten) auf 1 ableiten kann. Dies bedeutet dann allerdings, dass man e^{-x^2} integrieren muss, was anscheinend nicht einfach ist. Daher benutze ich die Substitution mit $z \equiv x^2$, $\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x$. Erst als nächster Schritt kommt die partielle Integration.

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{z}_{u}\,\underbrace{e^{-z}}_{v'}\,\mathrm{d}z = \underbrace{-\frac{1}{2}ze^{-z}}_{uv} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{u'}\int \underbrace{-e^{-z}}_{v}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}ze^{-z} - \frac{1}{2}e^{-z} = -\frac{1}{2}e^{-z}(1+z)$$

Wieder zurück substituieren.

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}(1+x^2)$$

1

$$D_f = D_F = \mathbb{R}$$

Aufgabe 53e

$$F = \int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\cos(x)}_{v'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\sin(x)}_{v} - \int \overbrace{\underbrace{2x}_{u'}}^{\xi}\,\overbrace{\underbrace{\sin(x)}_{v}}^{\eta'}\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x) + \overbrace{2x}^{\xi}\,\overbrace{\cos(x)}^{\eta} - \overbrace{2}^{\xi'}\int \overbrace{\cos(x)}^{\eta}\,\mathrm{d}x$$
$$= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)$$

1

$$D_f = D_F = \mathbb{R}$$

Aufgabe 53f

$$F = \int \cos(x)^2\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) + \int \sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \cos(x)\sin(x) + \int \mathrm{d}x - \int \cos(x)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x)\sin(x) + x\right)$$

Der Trick ist, dass man das $-\int \cos(x)^2\,\mathrm{d}x$ auf die linke Seite zieht und dann alles durch 2 teilt. Dann braucht man den Hilfssatz unten gar nicht.

$$D_f = D_F = \mathbb{R}$$

1

Hilfssatz:

$\Sigma_{53} = 6$

Benutze hier die Additionsformel für den Kosinus, $\cos(x+x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$.

$$\frac{1}{2}(\cos(2x)+1) = \frac{1}{2}\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2 + 1\right)$$

Ersetze $\sin(x)^2$ durch $1 - \cos(x)^2$.

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x)^2 - \left(1-\cos(x)^2\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(x)^2 + \cos(x)^2\right) = \cos(x)^2$$

Aufgabe 54a

$$\begin{aligned}
\sinh(\operatorname{arcsinh}(x)) &= x \\
\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) &= x \\
\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2 - 1}{x+\sqrt{1+x^2}} &= 2x \\
\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2 - 1 &= 2x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\
x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 - 1 &= 2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} \\
2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} &= 2x^2 + 2x\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

Somit ist $\sinh(x)$ die Umkehrfunktion des $\operatorname{arcsinh}(x)$. Beide Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Da $\sinh(x)$ aus Exponentialfunktionen zusammengesetzt ist, ist diese auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Zusammen mit der Eigenschaft, dass diese streng monoton steigend ist, ergibt sich die Bijektivität. e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ def. + str. mon. steigend aber nicht bijektiv

Zeige strenge Monotonie:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

$$\sinh(x) = e^x - e^{-x} < e^y - e^{-x} < e^y - e^{-y} = \sinh(y)$$

$$\sinh(x) < \sinh(y)$$

Da $\sinh(x)$ bijektiv ist, ist $\operatorname{arcsinh}(x)$ auch die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$, wie in der Aufgabenstellung gefragt.

1/2

Aufgabe 54b Da hier nur *eine* Stammfunktion gefunden werden soll, setze ich in dieser und der nächsten Aufgabe $C = 0$.

$$F = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

An dieser Stelle muss man darauf kommen, dass man $x \equiv \tan(u)$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}u$ setzen kann.

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan(u)^2}} \frac{1}{\cos(u)^2}\,\mathrm{d}u$$

Die Identität $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ kann man durch $\cos(x)^2$ teilen und erhält $1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$. Damit kann man den Term unter der Wurzel ersetzen.

$$= \int \sqrt{\cos(u)^2} \frac{1}{\cos(u)^2}\,\mathrm{d}u = \int \cos(u) \frac{1}{\cos(u)^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u$$

Man erweitert den Bruch, damit man im nächsten Schritt substituieren kann.

$$= \int \frac{1}{\cos(u)} \frac{\tan(u) + \frac{1}{\cos(u)}}{\tan(u) + \frac{1}{\cos(u)}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\frac{1}{\cos(u)}\tan(u) + \frac{1}{\cos(u)^2}}{\tan(u) + \frac{1}{\cos(u)}}\,\mathrm{d}u$$

Jetzt kann man $v \equiv \tan(u) + \frac{1}{\cos(u)}$, $\mathrm{d}v = \frac{1}{\cos(u)^2} + \frac{\tan(u)}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u$ setzen. Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{1}{\cos(u)}$ folgt aus der Quotientenregel $\frac{0\cos(u) - 1(-\sin(u))}{\cos(u)^2} = \frac{\tan(u)}{\cos(u)}$.

$$= \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \log(v)$$

Wieder v durch u ausdrücken.

$$= \log\left(\tan(u) + \frac{1}{\cos(u)}\right)$$

u durch x ersetzen. Dabei muss zuerst nach x umgeformt werden.

$$= \log\left(x + \frac{1}{\cos(\arctan(x))}\right)$$

Die Identität $\frac{1}{\cos(\arctan(x))} = \sqrt{1+x^2}$ kann man folgendermaßen zeigen: Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck und nenne den Winkel $\arctan(x)$. Die Ankathete wird auf Länge 1 normiert. Die Gegenkathete hat nun die Länge x, da $1 \cdot \tan(\arctan(x)) = x$. Die Länge der Hypothenuse ist $\sqrt{1+x^2}$. Der Kehrwert des Kosinus ist Hypothenuse durch Ankathete, letztere ist jedoch 1, es bleibt $\sqrt{1+x^2}$. nachrechnen ?!

$$= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Dies stimmt mit der Definition auf einem vorherigen Aufgabenblatt überein.

$$= \operatorname{arcsinh}(x)$$

Alternativ kann man auch $\sinh(z)$ zur Substitution benutzen, damit geht es *etwas*! schneller:

$$F = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Substituiere nun $x \equiv \sinh(z)$, $\mathrm{d}x = \cosh(z)\,\mathrm{d}z$.

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh(z)^2}} \cosh(z)\,\mathrm{d}z$$

An dieser Stelle kann man die Identität $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ ausnutzen.

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\cosh(z)^2}} \cosh(z)\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}z = z$$

Nun wieder zurück substituieren: $x = \sinh(z) \Leftrightarrow z = \operatorname{arcsinh}(x)$.

$$= \operatorname{arcsinh}(x)$$ 1,5

Aufgabe 54c

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Mit der **Formel für die Umkehrfunktion** kommt man auf das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh}'(x) &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)}\\
&= \frac{2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}
\end{aligned}$$

Jetzt kann man gleiche Terme zusammenfassen. Die Terme kommen doppelt vor und die 2 lässt sich kürzen.

$$= \frac{2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\left(1+x^2\right)+2x\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2+x\sqrt{1+x^2}}$$

Um die Wurzel ausklammern zu können, muss man $1+x^2$ als $\sqrt{1+x^2}^2$ interpretieren.

$$= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}^2+x\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$ 1,5

Aufgabe 54d Stammfunktion zu $\sqrt{1-x^2}$ bestimmen:

$$F = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Hier $x = \sin(u), dx = \cos(u)\,du$ substituieren.

$$= \int \sqrt{1-\sin(u)^2}\,\mathrm{d}u = \int \cos(u)^2\,\mathrm{d}u$$

Dieses Integral wurde bereits in Aufgabe 53f bestimmt.

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(u)\sin(u) + u\right) = \frac{1}{2}\sin(u)\cos(u) + \frac{1}{2}u$$

Der Kosinus wird durch einen Sinus ersetzt.

$$= \frac{1}{2}\sin(u)\sqrt{1-\sin(u)^2} + \frac{1}{2}u$$

Nun wird die Ersetzung teilweise rückgängig gemacht.

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}u$$

Für das letzte u muss man die Umkehrfunktion $x^{-1}(u) = u(x) = \arcsin(x)$ benutzen.

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

1,5

$\Sigma_{54} = 5$

Aufgabe 55a Hier kann man (mit der Physikermethode) die Variablen trennen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sqrt{y} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} &= \mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} &= \int \mathrm{d}x \\
2\sqrt{y} &= x + C \\
y &= \frac{1}{4}(x+C)^2
\end{aligned}$$

Dann setzt man $y(3) = 4$ um die Konstante C zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
4 &= \frac{1}{4}(3+C)^2 \\
\pm 4 &= 3 + C \\
C &= -3 \pm 4
\end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem wird durch $C = 1$ oder $C = -7$:

$$y(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 \quad \vee \quad y(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2$$

gelöst.

Allerdings ist die zweite Lösung nicht gültig, da die Ableitung dieser Funktion für den Anfangwert $y(3)$ negativ ist, somit müsste die Wurzel negativ sein.

Daher löst nur

$$y(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$$

die DGL und das Anfangswertproblem.

Mit der **Mathematikermethode** geht es natürlich auch:

Zuerst formt man die gegebene DGL in die Standardform um.

$$\begin{aligned} y' &= a(y) \cdot b(t) \\ &= \sqrt{y} \cdot 1 \end{aligned}$$

Jetzt wird eine Stammfunktion A bestimmt.

$$A = \int \frac{1}{a(y)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{y}$$

Die Integrationskonstante C wird später noch bestimmt.

Nun bildet man die Umkehrfunktion A^{-1}.

$$A(x) = 2\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}(y) = \frac{1}{4}x^2$$

Die Stammfunktion B zu b ist trivial: $\int 1\,\mathrm{d}t = t$.

Einsetzen in die Lösungsformel ergibt:

$$\begin{aligned} y(t) &= A^{-1}\left(B(t) + A(y_0) - B(t_0)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{4}\cdot 4^2 - 3\right)^2 = \frac{1}{4}(t+4-3)^2 = \frac{1}{4}(t+1)^2 \end{aligned}$$ 3

Aufgabe 55b Zuerst muss der Ansatz abgeleitet werden.

$$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Nun kann man in die gegebene Differentialgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} 2\lambda^3 e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} - 7\lambda e^{\lambda x} - 6e^{\lambda x} &= 0 \\ e^{\lambda x}\left(2\lambda^3 + \lambda^2 - 7\lambda - 6\right) &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstelle $\lambda = -1$ kann mit Hilfe des Gauß'schen Lemmas und Probieren erraten werden.

Das Lemma gibt die möglichen Nullstellen eines ganzzahligen Polynoms an. Angemommen p sei ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n. Dann können alle Nullstellen durch $\pm\frac{p}{q}$ ausgedrückt werden. In diesem Fall kommen als Nullstellen also $\lambda \in \left\{-6, -3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6\right\}$ in Frage.

Nun führt man eine Polynomdivision mit $(\lambda + 1)$ als Divisor durch und erhält:

$$2\lambda^3 + \lambda^2 - 7\lambda - 6 = (\lambda + 1)\left(2\lambda^2 - \lambda - 6\right)$$

Durch scharfes Hinsehen kann man sogar ohne PQ-Formel ausklammern:

$$2\lambda^2 - \lambda - 6 = 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 3\right) = 2\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)(\lambda - 2)$$

Die Lösungen sind also $\lambda \in \left\{-\frac{3}{2}, -1, +2\right\}$. Die gesuchten linear unabhängigen Lösungen sind:

$$\left\{e^{-\frac{3}{2}x}, e^{-x}, e^{2x}\right\}$$

3

$\Sigma_{ss} = 6$