Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

Martin Oeding #9 Richard

Paul Manz

41	42	43	44	45	Σ
6	6	3	5	5,5	25,5

41a) z.Z: $S_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_{\frac{\beta}{2}} = D_{\alpha-\beta}$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) & -\cos\alpha\sin(-\beta) - \sin\alpha\cos(-\beta) \\ \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) & -\sin\alpha\sin(-\beta) + \cos\alpha\cos(-\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = D_{\alpha-\beta}$$ 3

41b): $(AB)^{-1}$ existiert.

$$AB(AB)^{-1} = \mathbb{1} \iff A\underbrace{\left(B(AB)^{-1}\right)}_{\text{Inverse von } A} = \mathbb{1}$$

$$\iff \underbrace{\left((AB)^{-1}A\right)}_{B^{-1}} B = \mathbb{1}$$

$$\implies \exists A^{-1}, B^{-1}$$

Außerdem:

$$\exists (AB)^{-1} \implies \det(AB) \neq 0$$

$$\iff \det(A)\det(B) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0$$

$$\land \det(B) \neq 0 \iff \exists A^{-1} \land \exists B^{-1}$$

Das ganze funktioniert, da linke und Rechte Inversen gleich sind:

Angenommen, $CA = \mathbb{1}$ und $AA^{-1} = \mathbb{1}$.

$$C = C \cdot \mathbb{1}$$
$$C = C \cdot (A \cdot A^{-1})$$
$$C = (C \cdot A) \cdot A^{-1}$$
$$C = \mathbb{1} \cdot A^{-1}$$
$$C = A^{-1}$$

Rechte und linke Inverse (A^{-1} bzw. C) sind gleich.

3

$\Sigma_{4.1} = 6$

$\square$

42a) Finde A^{-1} über Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad A = A^{-1}$$

3

42b) $$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = BA$$

$$A^{-1}(BA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv \Lambda$$

Anscheinend besteht A aus den Eigenvektoren von B. Die~~se~~ Eigenwerte sind in Λ enthalten. Für B^{10} lässt sich nun ein „Teleskopprodukt" bauen:

$$A^{-1}BA = \cancel{A}\Lambda \iff B = A \cancel{A} \Lambda A^{-1}$$

$$\iff B^{10} = A\Lambda A^{-1} A \Lambda A^{-1} \dots = A \Lambda^{10} A^{-1}$$

Dies lässt sich jetzt komfortabel bestimmen:

$$\Lambda^{10} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2^{10} & -2^{11} \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (\Lambda \cdot A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\Lambda \cdot A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1-2^{10} & 1-2^{11}+3^{10} \\ 0 & 2^{10} & 2^{11}-2\cdot 3^{10} \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1023 & 57002 \\ 0 & 1024 & -116050 \\ 0 & 0 & 59049 \end{pmatrix}$$

3

$\Sigma_{42} = 6$

43)

x^3 und 0 sind beliebig oft differenzierbar.

Es ist also $x=0$ besonders zu testen.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0 = 0 = \lim_{x \searrow 0} f(x)$$

$f(x)$ ist stetig in $x=0$ ✓

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0)$ muss erst berechnet werden!

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = 0 = 0 = \lim_{x \searrow 0} f'(x)$$

Differenzenquotienten!

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

s.o.

$$\lim_{x \nearrow 0} f''(x) = 0 = 0 = \lim_{x \searrow 0} f''(x)$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f'''(x) = 6 \neq 0 = \lim_{x \searrow 0} f'''(x)$$

$f''(0)$ ist also nicht differenzierbar.

f ist nur exakt 2-mal d.-bar.

$\Sigma_{43} = 3$

44a) $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+\frac{\pi}{2})} + e^{-i(x+\frac{\pi}{2})}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(e^{ix} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-ix} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} \cdot i + e^{-ix}(-i)\right) =$

$\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -\sin(x)$

$\cos(x+\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+\pi)} + e^{-i(x+\pi)}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(e^{ix}(-1) + e^{-ix} \cdot (-1)\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = -\cos(x)$

2

44b) $\sin'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\frac{d}{dx} \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} \cdot i - e^{-ix} \cdot (-i)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

$= \cos(x)$

$\Rightarrow \cos(x) > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Der Cosinus hat in diesem Interval keine Nullstellen. Da $\cos(0) > 0$, gilt dies für das ganze Interval wegen dem Zwischenwertsatz.

Was ist mit <0 auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$?

1

44c)

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}$$

$$= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\left(1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)\cdot\cos(x)\cos(y)} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}$$

$$= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

2

$\Sigma_{44} = 5$

45a) $|r_k(x)| = \left|\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| = \left|(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x^2}{(k+1)(k+2)} + \frac{x^4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \dots\right)\right|$

$$= \left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \cdot \left|1 - \frac{x^2}{(k+1)(k+2)} \dots\right| \overset{\Delta}{\leq} \left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \left(1 + \left|\frac{x^2}{(k+1)(k+2)}\right| + \dots\right)$$

$$\leq \left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \left(1 + \left|\frac{x^2}{k^2}\right| + \left|\frac{x^4}{k^4}\right| + \dots\right) = \left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{k}\right|^{2n}$$

$\equiv \text{error}(x,k)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{k}\right|^{2n}$ Konvergiert für $\frac{x}{k} < 1$, also $x < k$.

Dann ist es $\frac{1}{1 - \left|\frac{x}{k}\right|^2}$.

error $(1,3)$ $\overset{\text{woher?}}{=}$ $0{,}0016 < 0{,}01$. Also min. 3 Terme:

$\cos(1) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = 0{,}542$

error $(2,4) \overset{!?}{\approx} 0{,}0085 < 0{,}01$. Also min 4 Terme:

$\cos(2) \approx 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} \doteq -0{,}422$

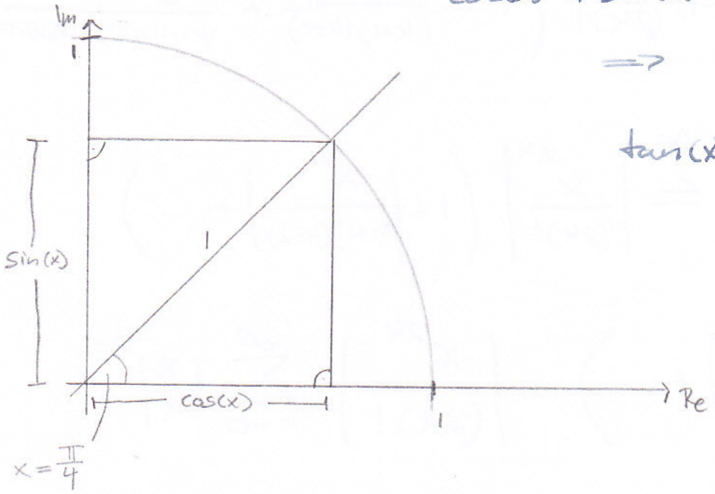
1,5

45b) $e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ $\quad\quad \cos(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow \cos(x) = \sin(x) = (\sqrt{2})^{-1}$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$



$e^{i\frac{\pi}{3}}$:

Gleichseitiges Dreick.

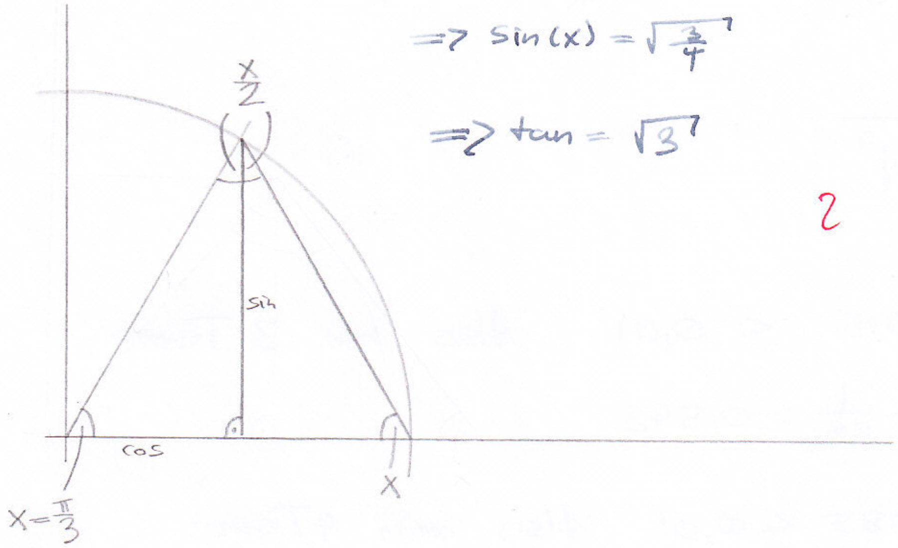
$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow \tan = \sqrt{3}$

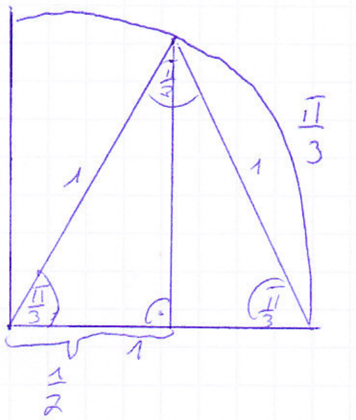
2



45c) Einsetzen: $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$.

Der Zwischenwertsatz garantiert (zumindest in $\mathbb{R}$) bei jedem Vorzeichenwechsel eine Nullstelle.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \rightarrow f(0) \\ f(1) \rightarrow f(2) \\ f(2) \rightarrow f(3) \end{array}\right\} \text{3 Nullstellen.}$$



Nach der Innenwinkelsumme ergibt sich zunächst ein gleichseitiges Dreieck.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{3} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

c)

f: ist die Summe aus der Cosinusfunktion (stetig in $\mathbb{R}$) und einem Polynom (stetig in $\mathbb{R}$) und damit selber in $\mathbb{R}$ stetig.

Durch Eingeben in den Taschenrechner ergibt sich:

$f(-1)<0$, $f(0)>0$, $f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(3)>0$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es zwischen $x=-1$ und $x=0$, $x=1$ und $x=2$ und zwischen $x=2$ und $x=3$ jeweils mindestens eine Nullstelle geben muss

2

$\Sigma_{43} = 5{,}5$