Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

nehmt mal ordentliche Tacker nadeln !!

36a) Martin Ueding #8 Richard

Paul Manz

36	37	38	39	40	Σ
3,5	5,5	3	3	2	17

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$au + wb = 1$ $\quad av + bx = 0$

$cu + dw = 0$ $\quad cv + dx = 1$

① $au + wb = 1$

② $cu + wd = 0$

② $u = -\frac{wd}{c}$ $c \neq 0$? $\quad u = \frac{1-wb}{a}$ ① $a \neq 0$

$$\frac{1-wb}{a} = \frac{wd}{c}$$

$$c - wbc = wad$$

$$c = w(-ad + bc)$$

~~② $- \frac{c}{a}$ ①: $dw - \frac{c}{a}bw = -\frac{c}{a}$~~

~~$adw - bcw = -c$~~

$\cancel{ad - bc = -\frac{c}{w}}$

$$w = \frac{c}{bc - ad}$$

$bc - ad \neq 0$

$\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

Es reicht nicht etwas in den Nenner zu schreiben um $\neq 0$ zu zeigen.

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ -cd+cd & ad-bc \end{pmatrix} = ad-bc \cdot \mathbb{1}$$

Somit ist es die Inverse.

1,5

36 b) Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Invertierbar falls $a^2 + b^2 \neq 0$

geord. körper

$M \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \vee b \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \vee b^2 > 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow$ Invertierbar.

Dies geht allerdings nur in geordneten Körpern.

$\mathbb{R}$ geht, $\mathbb{C}$ nicht.

Bsp.? genauer!

2

$\Sigma_{36} = 3,5$

37a) $m \sim_n k \iff (m-k) \% n = 0$

Das schreiben eigentlich nur Informatiker... Besser $m-k = xn,\ x \in \mathbb{Z}$ oder $m \equiv k \pmod n$ oder $n | m-k$

Reflexivität: $(m-m) = 0 = \lambda \cdot 0$ sollte hier nicht n stehen? ✓ was ist λ?

Symmetrie: $m \sim_n k \overset{!}{\iff} k \sim_m m$

$(m-k) = \lambda n \overset{!}{\iff} (k-m) = \lambda' n$

$-(m-k) = -\lambda' n$

$\lambda' = -\lambda$

✓

~~37b)~~ Transivität:

$m \sim_n k \wedge k \sim_n p \overset{!}{\Rightarrow} m \sim_n p$

$m-k = \mu n \qquad k-p = \lambda n$

$m-k+k-p = (\mu+\lambda) n$ (Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation)

$m-p = \rho n$

$m \sim_n p$ ✓

2,5

37b) Reflexivität: $x \sim x \iff \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \in U$ ✓

Symmetrie: $x \sim y,\ y \sim x$

$x-y = -(y-x)$ U ist in • abgeschlossen.

✓

Transitivität

$x \sim y,\ y \sim z \overset{!}{\Rightarrow} x \sim z$

$x - y = u_1 \quad , \quad y - z = u_2$

$x - y + y - z = u_1 + u_2$

$x - z = u_1 + u_2$ $\quad U$ ist in $+$ abgschl.

✓

3

$\Sigma_{37} = 5{,}5$

38a) Wähle $\varepsilon = \delta$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \varepsilon : \; \forall x \in \mathbb{R} \; |x - x_0| < \delta : \; ||x| - |x_0|| < \varepsilon$$

Falls $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt, gilt auch $||x| - |x_0|| < \varepsilon$:

$x \geq 0, \quad x_0 \geq 0: \quad |x - x_0| = ||x| - |x_0||$

$x \leq 0, \quad x_0 \geq 0: \quad |x - x_0| = |-|x| - |x_0|| = ||x| + |x_0||$
$\geq ||x| - |x_0||$

$x \geq 0, \quad x_0 < 0: \quad |x - x_0| = ||x| + |x_0|| \geq ||x| - |x_0||$

$x < 0, \quad x_0 < 0 \quad |x - x_0| = |-|x| + |x_0|| = ||x| - |x_0||$

Somit ist abs(x) in jedem $x = x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

2

38b) Unstetig in $x = 0$:

$$\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0)$$

Wenigstens eine Folge angeben bitte!

Was ist mit $x \neq 0$? 0,5

38c) $f(x) = x - \text{Floor}(x)$

Wir sind keine Informatiker!

Unstetig in $x = 1$

Und Floor ist viel länger als $[\cdot]$!

$$\lim_{x \nearrow 1} x - \text{Floor}(x) = \lim_{x \nearrow 1} x - \lim_{x \nearrow 1} \text{Floor}(x) = 1 - 0 = 1$$

$f(1) = 1 - \text{Floor}(1) = 0 \neq 1.$

Andere Stetigkeits- / Unstetigkeitsstellen?

0,5

$\Sigma_{38} = 3$

39a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Quot: $\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n}{n+1}$

$\in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet!

$= \overbrace{x \frac{n}{n+1}}^{\in \mathbb{C}} < |x| < 1 \quad \forall n \geq 1$

wo kommt der Betrag her? Betrag ist wichtig

Grenzwert ist x:

$$\lim_{n\to\infty} \left|x \frac{n}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x|$$ 1,5

39b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. $\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{5n} \quad \forall n \geq 0$

$\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{5n} \quad \forall n \geq 1$ Somit lassen

sich beide Reihen mit $\sum_{n=1} \frac{1}{5n}$ minorisieren, sie divergiere auch.

$\stackrel{?}{=} 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 1,5

39c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$

$= \underbrace{1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0}}_{<0} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots$ Fast alle Elemente sind <0, somit divergiert die Reihe gegen $-\infty$.

$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} > 0$!

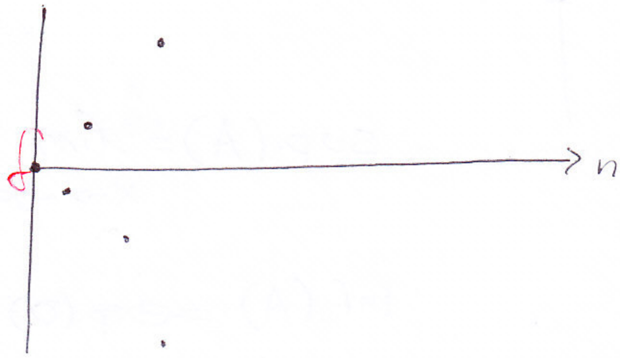
0 …

$\Sigma_{39} = 3$

40a) $A = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

A ist Teilmenge von $\mathbb{R}$, so sollte sie auch skizziert werden.

$0 \in \mathbb{N}$



$\sup(A) = \cancel{\infty}$ f

$\inf(A) = -\cancel{\infty}$ f

0

40b) $A = \left\{ \frac{n+2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$n=0: \quad \frac{2}{1} = 2$

s.o.

$\lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$

streng monoton fallend.

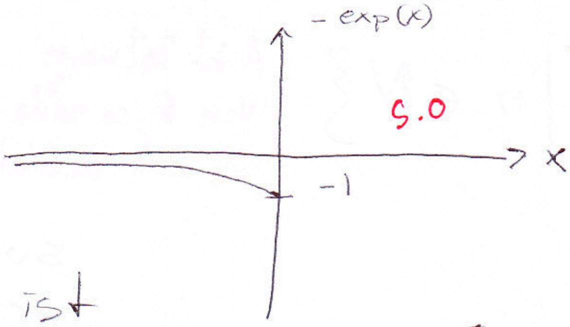
$\sup(A) = 2$

$\inf(A) = 1$

zeigen!

1

40 c)



$A = \{-\exp(x) \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}$

$\exp(x)$ ist streng monoton

$\sup(A) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\exp(x) = 0$

zeigen!

$\inf(A) = -\exp(0) = -1$

1

$\Sigma_{40} = 2$