Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

M

26) $\begin{pmatrix} t & -t & 2t-1 \\ t & -1 & 1 \\ 3 & -t-2 & 2t+1 \end{pmatrix} \overset{t\neq 0}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\frac{1}{t} \\ 0 & -1+t & 1-2t+1 \\ 1 & \frac{-t-2}{3} & \frac{2t+1}{3} \end{pmatrix} \overset{t\neq 1}{\rightsquigarrow}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\frac{1}{t} \\ 0 & 1 & \frac{-2t+2}{t-1} \\ 0 & -\frac{t}{3}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3}t+\frac{1}{3}-2+\frac{1}{t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\frac{1}{t}+\frac{-2t}{t-1} \\ 0 & 1 & \frac{-2t+2}{t-1} \quad \dots \\ 0 & 1 & \frac{\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}-2+\frac{1}{t}}{-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$t\neq 0$ woher kommt die Zeile?

Was ist für $t=1$?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\frac{1}{t}-\frac{2t}{t-1} \\ 0 & 1 & -\frac{2t}{t-1} \\ 0 & 0 & \frac{\frac{3}{t}-5}{1-t} \end{pmatrix}$

$= 0 \Rightarrow t=1$? ?

$= 0 \Rightarrow t = 0$

$\neq 0 \Rightarrow t \neq \frac{3}{5}$

$\rightarrow t \neq 1$

Falls $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} 0-0-v_3&=0 \\ -v_2+v_3&=0 \\ 2v_2+v_3&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &v_1 \text{ beliebig} \\ &v_2=v_3=0 \end{aligned}$$

$\dim(U_0) = 1$

$t=1$:

$$\left.\begin{aligned} v_1-v_2+v_3&=0 \\ v_1-v_2+v_3&=0 \\ 3v_1-3v_2+3v_3&=0 \end{aligned}\right\} \quad 2 \text{ bel.}$$

$\dim(U_1) = 2$

Für alle anderen (auch $\frac{3}{5}$) existiert nur der triviale Vektorraum. $\dim(U_t) = 0$ f

26	27	28	29	30	Σ
3	5,5	4,5	4	5,5	22,5

Basis für U_0 : $v_2 = v_3 = 0$
v_1 bel.

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Basis für U_1 : $v_1 - v_2 + v_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 + v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alle anderen : $\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ keine Basis

Ergänzen: U_0 : e_2, e_3

U_1 : e_2

U_t : e_1, e_2, e_3

$\Sigma_{26} = 3$

M

27a) Angenommen, a…e sind l.u.a. Somit ist $\dim(\mathcal{L}(a \dots e)) = 5$.

Alle v_k, die aus $\mathcal{L}(a \dots e)$ genommen werden, spannen maximal 5 Dimensionen auf. Siehe Basisaustauschsatz.

Damit ~~$\mathcal{L}(v_1 \dots v_6)$~~ $v_1 \dots v_6$ l.u.a sind, müsste $\dim(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_6)) = 6$ sein. Da aber $\mathcal{L}(a, \dots, e) \supseteq \mathcal{L}(v_1 \dots v_6)$ gelten muss, (Def. 5.15) kann $\dim(\mathcal{L}(v_1, \dots v_6))$ maximal 5 sein.

Was ist für $a, \dots, e$ nicht lin. unabh.?

$\Rightarrow (v_1, \dots v_6)$ sind l.a.

Alternativ: $\lambda v_1 + \dots + \mu v_3 = 0 \Rightarrow$

$$\lambda(a+b+c) + \beta(2a+2b+2c-d) + \sigma(a-b-e) + \mu(a+b+d+e) = 0$$
$$+ \varphi(5a+6b-c+d+e) + \tau(a-c+3e)$$

$$\Leftrightarrow a(\lambda + 2\beta + \sigma + 5\varphi + \tau + \mu) + b(\lambda + 2\beta - \sigma + 6\varphi + \mu)$$
$$+ c(\lambda + 2\beta - \varphi - \tau) + d(-\beta + \varphi + \mu) + e(-\sigma + \varphi + 3\tau + \mu) = 0$$

Alle ~~K~~ Klammern müssen 0 sein, damit a…e l.u.a.

$$\rightarrow \text{LGS} \rightarrow \left(\mathbb{1} \begin{pmatrix} 2{,}182 \\ -0{,}909 \\ -0{,}091 \\ 0{,}091 \\ 0{,}273 \end{pmatrix} \right) \neq \mathbb{1}$$

Wie?

Somit gibt es nicht ausschließlich die triviale Lösung, $v_1 \dots v_6$ sind l.a.

2,5

27b) zZ: nicht leer: $0 \in U_1, U_2$

$\rightarrow 0 + 0 = 0$

$0 \in (U_1 + U_2)$

abgeschl. geg. Addition: ~~u_1, u_2~~ $u_1, u_1' \in U_1$
$u_2, u_2' \in U_2$

$(u_1 + u_2) + (u_1' + u_2') = (u_1 + u_1') + (u_2 + u_2')$

$\equiv u_1'' + u_2'' \qquad (u_1'' + u_2'') \in (U_1 + U_2)$

abgeschl. geg. Multiplikat.:

$\lambda (u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 \equiv u_1' + u_2'$

$(u_1' + u_2') \in (U_1 + U_2)$

3

$\Sigma_{27} = 5,5$

6

28a) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{x^i}{n^i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} \frac{x^i}{n^i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$$

Damit dies für jedes k gilt, muss jeder Summand gleich sein.

Es reicht hier die Rückrichtung,... Die Aussage stimmt aber trotzdem.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-i)!\, i!} \frac{x^i}{n^i} = \frac{x^i}{i!}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-i)! \cdot n^i} = 1$$

Befrachtung der Faktoren

$$\frac{n \quad (n-1) \quad (n-2) \quad (n-3) \ldots 3 \quad 2}{\underbrace{n \quad n \quad n}_{n^i} \quad \underbrace{(n-3) \ldots 3 \quad 2}_{(n-i)!}} \qquad (i=3)$$

zZ: Der Grenzwert jedes Quotienten ist 1.

Für $(n-i)!$ ist es trivial.

Für $\frac{n}{n}$ ebenfalls.

Für die restlichen $\frac{n-k}{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-k}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{k}{n}}{1}$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 1 - k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 \cdot k = 1$$

Da alle Grenzwerte der Quotienten 1 sind, ist der komplette ebenfalls 1.

Somit gilt der Satz. 2

28b) Da $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{x^i}{n^i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$ ist, kann

$$\left| \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{x^i}{n^i} - \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \right|$$ beliebig klein werden.

somit gilt die erste Ungleichung.

Zweite Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} < \binom{n}{k+1} \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)!} < 2 \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k+1)!} \cdot \frac{1}{n^{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2 \frac{n!}{(n-k+1)!\,n^{k+1}} = \underbrace{2 \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \vdots \frac{(n-2)}{(n-2)} \frac{3}{3} \frac{2}{2}}_{\text{Hm, warum ist k plötzlich 2?}}$$

Aus 28a folgt, dass es für $n \geq 13$ größer als $\frac{1}{2}$ ist, somit gilt die Ungleichung. Der Bruch kann beliebig nah an 1 kommen.

Vielleicht etwas expliziter einfach die GW-Def. verwenden, aber von der Idee her richtig.

Fast fertig:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \qquad n > k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{x}{n}\right)^i \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \quad \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i - \frac{x^i}{i!}}_{\text{Betrag beliebig klein für große } n} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i}_{\geq 0} \geq 0$$

Das ≥ 0 reicht hier nicht. Man braucht, dass der zweite Term ~~dass~~ größer als der erste ist, damit es funktioniert.

Für große n stimmt dies

1/2

28c) $\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2-n}\right)^n = \left(\frac{n-a}{n-b}\right)^n \left(\frac{n-c}{n-d}\right)^n$

$(n-b)(n-d) = n^2-n = n^2 - bn - dn + db$

$bd=0, \quad -(b+d)=-1$

$(\boxed{b=1} \wedge \boxed{d=0}) \vee (b=0 \wedge d=1)$

$n^2+3n+2 = n^2 - (\overset{a}{\cancel{b}}+\overset{c}{\cancel{d}})n + \overset{ac}{\cancel{bd}}$

$+\overset{ac}{\cancel{bd}} = 2, \quad -(\overset{a}{\cancel{b}}+\overset{c}{\cancel{d}}) = 3$

$(\boxed{a=-1}, \boxed{c=-2}) \vee (a=-2, c=-1)$

$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(1+\frac{u}{n-1}\right)^n \left(1+\frac{v}{n}\right)^n$

$\frac{(n+1)+(n-1)-(n-1)}{n-1} = \frac{(n+1)-(n-1)}{n-1} + 1 = 1 + \frac{2}{n-1}$

$\boxed{u=2}$

$n+2+n-n \Rightarrow \boxed{v=2}$

$\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \left(1+\frac{2}{n-1}\right) \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2 \cdot 1 \cdot e^2 = e^4$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2-n}\right)^n = e^4$

2 $\quad \Sigma_{28} = 4{,}5$

Aufgabe 29

a)

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Satz 30: sei $\varepsilon > 0$ ~~[illegible]~~ und $0 < b < 1$ $\quad \exists n \quad |b^n| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert für alle ε ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\left|0 - \left(\frac{1}{e}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{e}\right)^n \leq \varepsilon$$

Warum ist $0 < \frac{1}{e} < 1$?

1,5

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} e^{-n} = 0$$

b)

zz: $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1^2} > e^{-x_2^2}$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$ für $x_1, x_2 > 0$

$\Rightarrow e^{x_2^2} > e^{x_1^2}$ folgt aus smw von e^x

Was ist ein smw?

S23 W)

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{x_1^2}} > \frac{1}{e^{x_2^2}} \Leftrightarrow e^{-x_1^2} > e^{-x_2^2}$$

1,5

w.z.b.w.

c)

$$e^{ax} \leq e^{x+b} \overset{\text{smw}}{\Longleftrightarrow} ax \leq x+b \Longleftrightarrow 0 \leq x+b-ax$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq x(1-a)+b$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-b}{(1-a)} \cancel{\leq} \underset{\geq}{} x$$

$1-a<0!$

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \underset{\leq}{\geq} \frac{-b}{1-a} \right\}$$

1

$\Sigma_{23} = \cancel{}\ 4$

30 a) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2 (1+|x|)^{2k} (1+|y|)^{2k}}{k!}$ $\quad z := \max(|x|,|y|)$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{k^2 (1+z)^{4k}}{k!} = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k(k-1)(k-2)}}_{A} \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{(1+z)^{4k}}{(k-3)!}}_{B}$$

A: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2}{k(k-1)(k-2)} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\frac{(k-1)(k-2)}{k}}$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k-3+\frac{2}{k}} = 0$$

B: $\exists\, k_0 \in \mathbb{N} : (k-m)! \geq n^k \quad \forall k \geq k_0$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{(1+z)^{4k}}{(k-3)!} \neq 0$$

$1+\frac{1}{n} \geq 1 \quad \forall n$ ABER: $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \not\to 0$

A+B:

$$0 \cdot 0 = 0$$

Die Folge konvergiert gegen 0. 1

30 b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{8n^3}{3^n}$ Test mit Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{8(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{8n^3}{3^n}} = \frac{\frac{8(n^3+3n^2+3n+1)}{3^n \cdot 3}}{\frac{8n^3}{3^n}}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^3} \leq \frac{1}{2} = q < 1$$

$$\forall n > 10$$

Die Reihe konvergiert absolut. 1,5

30 c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5n^2-3n+2}$ Zeigen der Divergenz durch Minorante:

$$\frac{n+1}{5n^2-3n+2} \geq \frac{n}{5n^2-3n+2} \overset{*}{>} \frac{n}{5n^2} \qquad * \ \forall n > 1$$

$$= \frac{1}{5n} \qquad \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

Somit muss obrige Folge auch divergiere. 1,5

30 d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^6 2^n}{n^{4n} \cdot n!^5}$ Test durch Quotienten Kriterium:

$$\frac{\frac{(n+1)^6 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{4(n+1)} (n+1)!^5}}{\frac{n^6 \cdot 2^n}{n^{4n} \cdot n!^5}} = \frac{\frac{(n+1)^6 \cdot 2}{(n+1)^{4n+4} (n+1)^5}}{\frac{n^6}{n^{4n}}} = \frac{n^{4n} (n+1)^6 \, 2}{n^6 (n+1)^{4n+4} (n+1)^5}$$

$$= n^{4n-6} (n+1)^{-3-4n} \cdot 2 = \underbrace{2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{4n}}_{A} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^6 (n+1)^3}}_{B}$$

$$A: \ 2\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-4} \longrightarrow 2\exp(-4) \leq q < 1 \quad \forall n > n_0$$

$$B: \ \frac{1}{n^6 (n+1)^3} \leq \frac{1}{n} \leq q < 1 \qquad \forall n > n_0$$

$$\exists q < 1: \ A \leq q \ \wedge \ B \leq q \quad \forall n \geq n_0 \ \Big| \ q = \frac{1}{2}, n_0 = 10$$

Die Reihe konvergiert absolut.

30 d)

$$\frac{n^6 \cdot 2^n}{n^{4n} \cdot n!^5} = \frac{2^n}{n^{4n-6}\, n!^5}$$

$\forall\, n \geq \frac{6}{4}$ gilt: $n^{4n-6} \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{2^n}{n^{4n-6}\, n!^5} \overset{\text{für } n \geq \frac{6}{4}}{\leq} \frac{2^n}{n!^5} \leq \frac{2^n}{n!}$$ ~~und das konvergiert absolut~~

~~Da die~~ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergiert absolut

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^6 \cdot 2^n}{n^{4n} \cdot n!^5}$ folgt aus dem Majorantenkriterium.

1,5 $\square$

$\Sigma_{30} = 5,5$