Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

M

29a) e^n wächst streng monoton
e^n ist nicht nach oben beschränkt.
Dies folgt schon aus dem 2. Term der Maclaurin Reihe $(\ldots + n + \ldots)$.

Somit fällt $\frac{1}{e^n} = e^{-n}$ streng monoton.

$\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 : \frac{1}{n} > \frac{1}{e^n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ (Vorlesung).

Somit ist $\frac{1}{e^n}$ durch $\frac{1}{n}$ majorisiert.

Außerdem ist bekannt, dass $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Somit: $\Rightarrow \frac{1}{e^x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{e^n} > 0$, somit ist es nach unten beschränkt.

Mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = 0$ folgt aus dem Sandwichlemma:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \geq \lim_{n \to \infty} e^{-n} \geq \lim_{n \to \infty} b_n \Rightarrow$$

$$0 \geq \text{"} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} = 0$$

29b) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a < b: \ f(a) > f(b)$

$f(x) = e^{-x^2}$

$a < b \overset{!}{\Longrightarrow} e^{-a^2} > e^{-b^2}$

Beweis:

$\varepsilon := b - a$

$e^{-b^2} = e^{-(a+\varepsilon)^2} = e^{-(a^2+2a\varepsilon+\varepsilon^2)} = e^{-a^2} \cdot \underbrace{e^{-2a\varepsilon} \cdot e^{-\varepsilon^2}}_{<1} > e^{-a^2}$

$e^{-2a\varepsilon-\varepsilon^2} < 1$

$\forall x > 0: e^x > 1$, da $e^0 = 1$ und e^x streng monoton wächst.

$\Leftrightarrow -2a\varepsilon - \varepsilon^2 < 0 \Leftrightarrow 2a\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$

Siehe def: $\varepsilon > 0 \Leftarrow a < b, \ a > 0.$

Somit gilt die Aussage, dass e^{-x^2} str. mon. fall. ist. $\square$

29c) $e^{ax} \leq e^{x+b} \Leftrightarrow e^{ax} \leq e^x \cdot e^b$

$\Leftrightarrow e^{ax-x} = \frac{e^{ax}}{e^x} \leq e^b \Leftrightarrow e^{x(a-1)} \leq e^x$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{e^b}{e^{x(a-1)}} = e^{b-(x(a-1))} = e^{b-ax+x}$

$\Rightarrow b - ax + x \geq 0$ (siehe 29b)

$\Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a-1}$ $\qquad \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x \geq \frac{b}{a+1}\}$

M

29d) $\exp(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{x}^k}{k!}$

Hilfssatz: $(\bar{x})^k = \overline{x^k}$

Beweis: Ind. über k.

Induktionsanfang: $k=0$ $\quad \bar{x}^0 = 1 = \overline{x^0}$

Induktionsschritt:

$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k \cdot \bar{x} \overset{I}{=} \overline{x^k} \cdot \bar{x} = \left(\mathrm{Re}(x^k) - i\,\mathrm{Im}(x^k)\right)\left(\mathrm{Re}(x) - i\,\mathrm{Im}(x)\right)$

$= \left(\mathrm{Re}(x^k)\mathrm{Re}(x) - \mathrm{Im}(x^k)\mathrm{Re}(x)\right) - i\left(\mathrm{Re}(x^k)\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(x)\mathrm{Im}(x^k)\right)$

$= \overline{\qquad \text{"} \qquad + \qquad \text{"} \qquad}$

$= \overline{x^k \cdot x} = \overline{x^{k+1}}$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt der Hilfssatz. $\square$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{x}^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\overline{x^k}\right)}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \overline{\left(\frac{x^k}{k!}\right)}$

(Aufgabe 23a)

$= \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}} \overset{23c}{=} \overline{\exp(x)}$

$\Rightarrow \exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$