Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

Paul Manz

Martin Ueding #5 Richard

21	22	23	24	25	Σ
5,5	6	6	5	3,5	26

21a) $U: \quad v_1 + i v_2 = 0 \qquad V: \quad 2v_1 + v_2 + i v_3 = 0$

$U \cap V: \quad v_1 + i v_2 = 0 \;\wedge\; 2v_1 + v_2 + i v_3 = 0$

$-2i v_2 + v_2 + i v_3 = 0 \iff (1-2i) v_2 + i v_3 = 0$

$v_3 = \frac{-(1-2i)}{i} v_2 = i(1-2i) v_2 = (2-i) v_2$

$v_1 = -i v_2$

Schnitt der Unterräume angeben!

$$\begin{pmatrix} -i v_2 \\ v_2 \\ (2-i) v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \right\}$ 1,5

21b) $2v_1 + 3v_2 = v_3$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 2v_1 + 3v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot v_2$$

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ 2

21c) U: Abgeschlossenheit in $\mathbb{R}$

$+: \quad g, h \in U, \quad g(1) + h(1) = 0 + 0 = 0$

$(g+h)(1) = 0$

$(g+h) \in U$

$\cdot: \quad g \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad g(1) \cdot \lambda = 0 \cdot \lambda = 0$

$(\lambda g)(1) = 0$

$(\lambda g) \in U$

U ist nicht leer, z.B. $\{ f(x) = 0 \} \subseteq U$

U ist ein Unterraum. ✓

V: $+$: $g, h \in V$ $g(1)+h(1) > 1$ woher kommt die 1?

$(g+h)(1) > 1$

$(g+h) \in V$

$\cdot$: $g \in V, \lambda \in \mathbb{R}$: $g(1) \cdot \lambda = ?$

Falls $\lambda < 0$, dann $(\lambda g)(1) < 0$

$\{\lambda g \mid \lambda < 0\} \notin V$

V ist kein Unterraum.

2

$\Sigma_{21} = 5,5$

Martin Ueding #5 Richard

22a) Um den $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum aufzuspannen, braucht man als Basis: (analog zu $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Raum)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Da die Komponenten komplexe Zahlen sind, bildet die Basis ~~eine Abelsche Gruppe~~ f. Aus den Körperaxiomen folgen, Assoziativgesetz der Skalarmul., die 1, Distributivgesetze.

Somit sind die 8 Gesetze für V-R erfüllt. Dass $\mathbb{C}^2$ ein $\mathbb{C}$-VR ist wissen wir schon, wir wollen nur eine Basis.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht in der Basis.

$\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Raum:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ [Auch dies erfüllt die 8 Gesetze.]

Die Basis ist l.u.a, da $1 = \lambda \cdot i$ für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

$\left\{ (1), (i) \right\}_{\mathbb{R}}$ spannen $\left\{ (1) \right\}_{\mathbb{C}}$ auf. Somit ist das Problem auf das obrige zurückgeführt.

3

#5

22b) v_1, v_2, v_3 sind l.u.a. Also:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \lambda_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad \forall\, i \in [1;3] \qquad (1)$$

Damit alle w_i l.u.a sind muss obriges auch für $\forall\, w_i$ gelten.

$w_1 := v_1 + i v_2 + i v_3$
$w_2 := v_1 - v_2 + i v_3$
$w_3 := v_1 - i v_2 + v_3$

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0 \iff$
$\lambda_1 (v_1 + i v_2 + i v_3) + \lambda_2 (v_1 - v_2 + i v_3) + \lambda_3 (v_1 - i v_2 + v_3) = 0$

$\iff v_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + v_2(\lambda_1 i - \lambda_2 - \lambda_3 i) + v_3(\lambda_1 i + \lambda_2 i + \lambda_3) = 0$

Alle Klammern müssen 0 sein, damit ~~w_i~~ v_i l.u.a. ist, siehe (1). gut!

$j := i$

$$\implies \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 i - \lambda_2 - \lambda_3 i = 0 \\ \lambda_1 i + \lambda_2 i + \lambda_3 = 0 \end{array} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & -1 & -j \\ j & j & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 \\ 1 & 1 & -j \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & 0 \\ 0 & 0 & -j-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{1} \implies$$ Es gibt nur die Triviale Lösung.

Somit sind w_i l.u.a.

3

$\Sigma_{22} = 6$

#5

23a)

$\mathrm{Re}(x+y) = \mathrm{Re}(\mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y) + i\mathrm{Im}(y)) =$
$\mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y)$

$\mathrm{Im}(x+y) = \mathrm{Im}(\mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y) + i\mathrm{Im}(y)) =$
$\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Im}(y)$

$\overline{x+y} = \overline{\mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y) + i\mathrm{Im}(y)} = \overline{\mathrm{Re}(x+y) + i\mathrm{Im}(x+y)}$
$= \mathrm{Re}(x+y) - i\mathrm{Im}(x+y) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y) - i\mathrm{Im}(x) - i\mathrm{Im}(y)$
$= \mathrm{Re}(x) - i\mathrm{Im}(x) + \mathrm{Re}(y) - i\mathrm{Im}(y) = \overline{\mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x)} + \overline{\mathrm{Re}(y) + i\mathrm{Im}(y)}$
$= \overline{x} + \overline{y}$

$\wedge$

23b) $\lim x_n = x \iff \lim(\mathrm{Re}(x_n)) = \mathrm{Re}(x)$ (alle Limits für $n \to \infty$)
$\wedge \lim i\mathrm{Im}(x_n) = i\mathrm{Im}(x)$

$\lim x_n = \cancel{\lim}\, x$
$\iff \lim(\mathrm{Re}(x_n) + i\mathrm{Im}(x_n)) = \mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x)$
$\iff \lim \mathrm{Re}(x_n) + \lim i\mathrm{Im}(x_n) = \mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x)$

Real und Imaginärteil sind l.u.a und müssen so auch getrennt gelten:
$\iff \lim \mathrm{Re}(x_n) = \mathrm{Re}(x) \wedge \lim i\mathrm{Im}(x_n) = i\mathrm{Im}(x)$ $\wedge$

$\square$

23c) $\lim(x_n) = x$ $\iff$
$\lim(\mathrm{Re}(x_n) + i\mathrm{Im}(x_n)) = x$ $\iff$
$\lim \mathrm{Re}(x_n) + \lim i\mathrm{Im}(x_n) = \mathrm{Re}(x) + i\mathrm{Im}(x)$ $\quad | -2i\mathrm{Im}(x)$ $\iff$
$\lim \mathrm{Re}(x_n) + \lim i\mathrm{Im}(x_n) - 2i\mathrm{Im}(x) = \mathrm{Re}(x) - i\mathrm{Im}(x)$
(23b) $\iff$ $\lim \mathrm{Re}(x_n) - \lim i\mathrm{Im}(x_n) \overset{\text{(wie?}}{=} \overline{x}$
$\iff \lim \overline{x_n} = \overline{x}$

$\wedge$ [illegible]

23d) $(4+3i)x = 10-5i \Leftrightarrow x = \frac{10-5i}{4+3i} = \frac{(10-5i)(4-3i)}{16+9}$

$= \frac{(40-15) + i(-20-30)}{25} = 1-2i$ 1

23e) $x^2 = 1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

$x = \pm \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}}$

$\mathbb{L} = \{ \sqrt[4]{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{8}) + i \sqrt[4]{2} \sin(\frac{\pi}{8});$
$\sqrt[4]{2} \cos(\frac{\pi}{8}) - i \sqrt[4]{2} \sin(\frac{\pi}{8}) \}$ 1

23f) $x^3 + (7-2i)x^2 + (15-9i)x + 10-10i = 0$

Lösung $x=-2$ kann erraten werden.

$p(x) : (x+2)$:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + (7-2i)x^2 + (15-9i)x + 10-10i) : (x+2) = x^2 + (5-2i)x + (5-5i) \\
\underline{x^3 + 2x^2} \\
(5-2i)x^2 \\
\underline{(5-2i)x^2 + (10-4i)x} \\
(5-5i)x \\
\underline{(5-5i)x + (10-10i)} \\
0
\end{array}$$

$x_{2,3} = -\frac{(5-2i)}{2} \pm \sqrt{\frac{21}{4} - 5i - (5-5i)}$
$= -(\frac{5}{2} - i) \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{5}{2} + i \pm \frac{1}{2}$

$\mathbb{L} = \{-2, -3+i, -2-i\}$ 1

$\Sigma_{23} = 6$

#5

24a) $\frac{n}{5(n+3)} = \frac{\frac{1}{n} \cdot n}{\frac{1}{n}(5(n+3))} = \frac{1}{5+\frac{15}{n}} = a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{5} \neq 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert. 1,5

24b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \exp(2)$ ✓ 1,5 (Taylor/Maclaurin von $\exp(x)$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

24c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Anw. des Quotientenkriteriums:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Dies muss für fast alle n $\leq \vartheta < 1$ sein.

$\vartheta = \frac{1}{2}$, $n \geq 1$:

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \leq \vartheta$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2} \leq \vartheta$, ... Das ist kein Beweis..

Die Reihe konvergiert. 1

24d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^4}{3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}{3} \leq \vartheta < 1$$

n_0 finden: $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}{3} < 1 \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 < 3 \iff$

$1+\frac{1}{n} < 3^{\frac{1}{4}} \iff \frac{1}{n} < 3^{\frac{1}{4}} - 1 \iff n > \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}-1}$

$n_0 = 4 \; : \; \frac{\left(1+\frac{1}{4}\right)^4}{3} < 1 \quad (\checkmark)$

Für $n > n_0$ gilt das Quotientenk.,
die Reihe konvergiert.

Das <1 reicht nicht. Es muss $< \theta < 1$ gelten.

Sonst wäre $\sum \frac{1}{n}$ wegen $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$ konvergent.

1

$\Sigma_{24} = 5$

Martin Ueding #5 Richard

25a) Eindeutigkeit des Inversen:

$\exists!\, c \in \mathbb{K}: a+c=0, \quad a \in \mathbb{K}$

$a+c=0 \iff a+c+(-a) = 0+(-a)$

$\overset{\text{Ass./Komm.}}{\iff} (a+(-a))+c = 0+(-a)$

$\overset{\text{Null}}{\iff} (a+(-a))+c = 0+(-a)$

$\overset{\text{Inv.}+}{\iff} 0+c = 0+(-a) \quad \overset{\text{Null}}{\iff} \quad c=-a$

$\forall a\, \exists!\, c: a+c=0 : c := -a$ 1,5

25b) $(-a)(-b) \overset{\text{Eins}}{=} (-a)(-1)b \overset{\text{komm.}}{=} (-1)(a)b \overset{\text{Ass}}{=} (-(-a))b \overset{*}{=} ab$

Von der 1 wissen wir nur, dass $1\cdot(-b)=-b$ bzw $-b=-(1\cdot b)$

* ham schon in der Übung vor, $(-(-x))=x$ $\frac{1}{2}$

In der Aufgabenstellung steht nur mit Axiomen!

25c) Zeige: Bijektivität: $g_a(x) = xa$ nicht ax.

$\forall x,y \in \mathbb{K}: x \neq y \Rightarrow (ax \neq ay \iff g(x) \neq g(y))$

$ax \neq ay \iff x \neq y$, siehe Definition. ? warum?

~~Translations/Skal. - Invarianz~~

g ist Injektiv.

$\forall y \in \mathbb{K}: \exists x \in \mathbb{K}: (ax = y \iff g(x)=y)$

$x = a^{-1}\cdot y$ (Mul. Inverses) Aug. $x = ya^{-1}$

a^{-1} existiert, da $a>0$. Somit $\exists x \forall y$.

$c<d \iff \underbrace{d-c>0, \quad a>0}_{a(d-c)>0}$ Abgeschlossenheit Mul.

$\overset{\text{Dist.}}{\iff} ad \overset{A_y}{-} dc > 0$

$\iff ac < ad \iff g(c) < g(d)$

1

25a) Angenommen $<$ existiert:

Abgeschlossenheit gegen Mul:

$a > 0, \quad b > 0 \implies ab > 0$

$\implies (a = b) \qquad a^2 > 0$

Falls $a = 0, \quad a^2 = 0$

Falls $a < 0, \quad b = -a$: $\quad b^2 > 0 \implies (-a)^2 > 0$
warum?

$\iff a^2 > 0.$
warum?

Für $a = i, \quad a \neq 0.$ ↯

Also: $i^2 > 0$. Aber $-1 > 0$ ist ein

Widerspruch. ↯ $<$ kann nicht in $\mathbb{C}$ existieren.
warum?

Mit Axiomen argumentieren!

$\frac{1}{2}$

$\Sigma_{25} = 3{,}5$