Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

Paul Manz

Martin Ueding #4 Richard

16	17	18	19	20	Σ
3,5	1	4	0	3	11,5

16 a) $A = (v_1\ v_2\ v_3)$ muss Rang 3 haben.
det A muss $\neq 0$ sein.
rref A darf keine Nullzeile haben.

Was implizieren diese Sachen?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & t+4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & t+4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

$t-1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 1$

Für $t \neq \cancel{0}1$ sind die Vektoren l.u.a. 2,5

16 b) $A = (v_1\ v_2)$ rref(A):

Was ist das?

Was heißt diese Folge? Was wird da gemacht

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\1\\2\end{pmatrix}\right) \neq \mathcal{L}(e_1, e_2)$!

x_1 und x_2 werden abgedeckt somit fehlen x_3 und x_4. Beweis, dass e_3 und e_4 mit v_1 und v_2 $\mathbb{R}^4$ aufspannen:

$$\begin{pmatrix} 2&4&0&0 \\ 3&3&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&2&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&2&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Rang ist 4.

Was heißt Rang = 4?

Wenn man e_1 und e_4 nimmt, bekommt man schnell eine Nullzeile: 1

Was heißt das?

$$\begin{pmatrix} 2&4&1&0 \\ 3&3&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&2&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2&4&1&0 \\ 3&3&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&2&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang} < 4, \text{ kein } \mathbb{R}^4 \ ?$$

$\Sigma_{16} = 3,5$

17

a)

$$a_n x^n \geq k \cdot |a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}|$$

$$\Leftarrow a_n x^n \geq k \cdot |a_0| + |a_1 x| + \ldots + |a_{n-1} x^{n-1}|$$

$$\Leftrightarrow a_n x^n \geq k \cdot \left(|a_0| + |a_1| x + \ldots + |a_{n-1}| x^{n-1}\right)$$

, da $x > 0$

$$\Leftrightarrow a_n x \geq k \cdot \left(\left|\frac{a_0}{x^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_1}{x^{n-2}}\right| + \ldots + |a_{n-1}|\right)$$

nehme an

Fall 1: $x_0 = 1 \geq \frac{k}{a_n}$, $\frac{k}{a_n}(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|)$

$$x \geq \frac{k}{a_n} \cdot \left(\left|\frac{a_0}{x^{n-1}}\right| + \ldots + |a_{n-1}|\right) \stackrel{x \geq 1}{\geq} \frac{k}{a_n}\left(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|\right) \leq x_0 \leq x$$

$a_n > 0$

Das passt nicht, da die x im Nenner stehen.

erfüllt die Vorraussetzung Fall 1

Ihr wollt rückwärts folgern, da hättet ihr hier unten die Ugl. irgendwie anders schachteln müssen

nehme an

Fall 2: $x_0 = \frac{k}{a_n} \geq 1$, $\frac{k}{a_n}\left(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|\right)$

$$x \geq \frac{k}{a_n}\left(\left|\frac{a_0}{x^{n-1}}\right| + \ldots + |a_{n-1}|\right) \geq \frac{k}{a_n}\left(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|\right) \leq x_0 \leq x$$

siehe oben

erfüllt die Vorraussetzung Fall 2

nehme an

Fall 3: $x_0 = \frac{k}{a_n}\left(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|\right) \geq \frac{k}{a_n}$, 1

$$x \geq \frac{k}{a_n}\left(\left|\frac{a_0}{x^{n-1}}\right| + \ldots + |a_{n-1}|\right) \geq \frac{k}{a_n}\left(|a_0| + \ldots |a_{n-1}|\right) = x_0 \leq x$$

erfüllt Vorraussetzung Fall 3

$\square$

2.

zzg $a_n x^n \geq k \Leftrightarrow x^n \geq \frac{k}{a_n}$

Fall 1 nehme an $x_0 = 1 \geq \frac{k}{a^n}$ $\quad x^n \geq \frac{k}{a_n} \leq x_0 \leq x \leq x^n$ $\quad x \geq 1$

Fall 2 nehme an $x_0 = \frac{k}{a^n} \geq 1$ $\quad x^n \geq \frac{k}{a_n} = x_0 \leq x \leq x^n$

Fall 3 muss nicht betrachtet werden Bitte keine Ugl.-ketten mit Rel. in verschiedene Richtungen.

Warum Fälle? Ihr braucht doch ohnehin nur die Abschätzungen.

1

b)

zzg: $a_n x^n \geq |a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}| + k \cdot |q(x)|$

$\Sigma_{17} = 1$

Aufgabe 18

a)

zzg: Abgeschlossenheit in Addition und skalarer Multiplikation

Addition: $p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, $p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

$$(p_1 + p_2)(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3$$

$$\in V$$

skalare Multiplikation: $(\lambda p)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3 \quad \in V$

Daraus folgt, dass V ein Unterraum von M ist. 2

b)

Für eine Basis muss gegeben sein: lineare Unabhängigkeit und vollständige Bestimmung

(U ist offensichtlich, da es keinen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ außer 0 gibt, ~~[illegible]~~ mit ~~dessen~~ dem man einen ~~[illegible]~~ der Vektoren durch skal. Mult. als einen anderen darstellen kann. Man muss ausschließen, dass ein Basisvektor im linearen Erzeugnis der anderen liegt!

vollst. Bestimmung heißt $\mathcal{L}(1, x, x^2, x^3) = V$

dies folgt aus der Definition von V. $\frac{1}{2}$

c)

zeige lU

$1+x, 1+2x+x^2, x^2, 1+3x+3x^2+3x^3$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&0\\1&2&0&3&0\\0&1&1&3&0\\0&0&0&\underbrace{1}_{=0}&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&2&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&\underbrace{1}_{=0}&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}\underbrace{1}_{=0}&0&0\\0&\underbrace{1}_{=0}&0\end{array}\right)$$

es existiert nur die triviale Lösung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$

Was heißt das, was hat das GLS mit den Polynomen zu tun?

1,5

$\Sigma_{18} = 4$

Martin Uediny #4 Richard

19a) $a_n \leq b_n \overset{!}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

$\Longleftrightarrow a \leq b$

Beweis: $a_n \leq b_n \Longleftrightarrow a_n - b_n \leq 0$

$\Longleftrightarrow 0 \leq b_n - a_n \overset{\Delta}{\leq} |b_n - b| + |b-a| + |a - a_n|$

Dieses ε ist aber unter Umständen sehr groß, dann kann man garnichts mehr folgern. Wähle n indbh.

Man finde ein $\varepsilon/2$, so dass es größer als $|b_n - b|$ und $|a-a_n|$ ist.

Von ε, nicht umgekehrt.

Das gilt alles nicht für alle n...

$\circledast$

$\ldots < \frac{\varepsilon}{2} + |b-a| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + (b-a)$

wohin verschwindet der Betrag?

$\Longleftrightarrow 0 < \varepsilon + (b \mp a)$. Somit kann $b = a$ sein, weil $\varepsilon > 0$ die Ungleichung schon erfüllt.

$\square$

Setzt man in der obigen Herleitung $a_n < b_n$, so entsteht bei $\circledast$ ebenfalls ein echt kleiner, die Schlussfolgerung $a \leq b$ kommt ebenfalls heraus. Somit gilt die strengere Behauptung nicht.

Bsp: e^{-x} und $-e^{-x}$. Zwar ist $-e^{-x} < e^{-x}$ $\forall x$, jedoch ist $0 \neq 0$, sondern $0 \leq 0$.

?

19b) c_n muss für $n \to \infty$ konvergieren, weil c_n immer im Interval $[a_n, b_n]$ liegen muss. Für größere n wird das Interval kleiner, bis es für $a=b$ im Grenzwert nur noch einen Wert erhält. Da jedes c im Interval liegt, muss der Grenzwert auch im Interval liegen.

Das ist eine Erklärung, aber kein Beweis. Def. des GW verwenden!

Aus (19a) kann man folgern, für $c_n \to c$ für $n \to \infty$:

$a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow a \leq c \leq b.$

Da $a=b$, gilt $a \leq c \leq a$, was auf $a=c$ vereinfacht werden kann.

Bitte schaut euch die Def. des GW an und arbeitet damit.

c_n konvergiert gegen a.

0

$\Sigma_{19} = 0$

Aufgabe 20

a)

die Folge konvergiert nicht, da es sich um eine alternierende Folge mit immer größerwerdenen Beträgen handelt. Mit Def. argumentieren!

0

b)

$$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}$$

Begründe noch warum der lim im Nenner nicht 0 ist.-

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}\right) = \frac{\lim 1}{\lim 1 + (\lim 2)\cdot(\lim\frac{1}{n}) + (\lim\frac{1}{n})(\lim\frac{1}{n})}$$

kürze ab: $\lim_{n\to\infty}$ mit lim

$$= \frac{1}{1+2\cdot 0+0\cdot 0} = 1$$

1

c)

$$x_n = \frac{n}{2^n} + 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{=2}$$

$$= \lim\frac{n}{2^n} + 2$$

zeige $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ mithilfe des Quotientenkriteriums mit $\Theta = \frac{3}{4}$

$$a_n = \frac{n}{2^n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{3}{4}\frac{n}{2^n} \iff \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{4}\frac{n}{2^n}}_{\text{gilt für alle } n\geq 0}$$

sorry

gilt für $n\geq 2$!

Daraus folgt, dass ~~a_n~~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

dies beweist, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ (Satz 54)

~~Also~~ $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$

1/2

d)

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}$$

zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ~~ein n_0, so dass~~ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\left| 0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right| < \varepsilon$ (folgt aus Satz 30)

Weiter? 1/2

e)

$$x_n = \frac{n^2 + 2n - 2}{(n+1)^2} = \underbrace{\frac{n^2}{(n+1)^2}}_{=1 \text{ siehe (b)}} + \frac{2n}{n^2+2n+1} - \frac{2}{n^2+2n+1}$$

$\to 1$ aber nicht $= 1$

$$\frac{2n}{n^2+2n+1} = \frac{2}{n+2+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0+0} = 0$$

$$\frac{-2}{n^2+2n+1} = \frac{-2}{(n+1)^2} = -2 \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = -2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} -2\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 0$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

ok nächstes mal möglichst alles beisammen behalten, oder am Ende alles zusammen aufschreiben. 1

f)

$$x_n = \frac{n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad \lim\left\{ \underbrace{\frac{1}{n+3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}_{0} + \underbrace{\frac{3}{n^2+3n+3+\frac{1}{n}}}_{0} + \underbrace{\frac{2}{n^3+3n^2+3n+1}}_{0} \right\}$$

Warum? Warum? Warum?

$= 0$

0

$\Sigma_{20} = 3$