Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

Martin Oeding #4 Richard

17a) Für $x_0 = 1$:

$$\frac{k}{a_n} \leq 1, \quad \frac{k}{a_n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right| \leq 1 \quad (\text{wg. } \max())$$

$$a_n x^n \geq k \iff x^n \geq \frac{k}{a_n}$$

Mit obrigen Bed. folgt: $x^n \geq 1$, ab $x \geq 1$, was bei $n \geq 1$ (Aufgabenstellung) geg. ist. $\square$

Für $x_0 = \frac{k}{a_n}$: Somit muss $\left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right| \leq 1$ sein, damit dieser Fall von $\max()$ gewählt wurde.

$\frac{k}{a_n} > 1$, weil es nicht 1 geworden ist.

$$\left(\frac{k}{a_n}\right)^n \geq \frac{k}{a_n} \geq \frac{k}{a_n} \cdot \underbrace{\left|\sum \cdots\right|}_{\leq 1} \quad \forall\, n \geq 1, \text{ da } \frac{k}{a_n} > 1 \text{ ist.}$$

$\square$

Für $x_0 = \frac{k}{a_n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$: Hier muss $|\Sigma \cdot| \geq 1$ sein, ansonsten wäre $\frac{k}{a_n}$ gewählt. ~~$\frac{k}{a_n}$ muss ≥ 1 sein, ansonsten wäre 1 gewählt.~~

Setzt man x_0 ein:

$$\left(\frac{k}{a_n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)^n \geq \frac{k}{a_n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \left(\frac{k}{a_n} \cdot \sum |a_i|\right)^i \right|$$

Martin Oeding #4 Richard

18 a) - Abgeschlossenheit in + und $\cdot$.
- Nullvektor.
- Inverses additives Element.
sind zu zeigen.

Alle Summen sind wieder Polynome

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$p' = a_0' + a_1' x + a_2' x^2 + a_3' x^3$$

Summe: $p + p'$:
$$(a_0 + a_0')x^0 + (a_1 + a_1')x^1 + (a_2 + a_2')x^2 + (a_3 + a_3')x^3$$

$a_i'' = a_i + a_i^*$, somit haben wir:

$$p'' = \sum_{i=0}^{3} (a_i + a_i') x^i = \sum_{i=0}^{3} (a_i'') x^i,$$

welches wieder in V ist.

Bei der Skalarmultiplikation ist es ähnlich:

$$\lambda p = \lambda \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{3} (\lambda a_i) x^i.$$ Mit $a_i' = \lambda a_i$

wird $p' = \sum_{i=0}^{3} a_i' x^i$, welches $\in V$ ist.

Invers additiv geht mit $a_i' = -a_i$.
Invers skalar mit $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$.
Nullvektor ist $p(x) = 0$

18 b) Die Vektoren müssen unabhängig sei.

$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$, es gibt nur die triviale Lösung $\forall x$.

$\Rightarrow$ Vektoren l. u. a. $\Rightarrow$ Basis für V

18 c) Gleiches Prinzip:

$$a(1+x) + b(1+x)^2 + cx^2 + d(1+x)^3 = 0$$
$$a + ax + b + 2bx + bx^2 + cx^2 + d + 3dx + 3dx^2 + dx^3 = 0$$
$$(a+b+d) + x(a+2b+3d) + x^2(b+c+3d) + x^3(d) = 0$$

Dies gilt nur, wenn alle Klammern $=0$, $\forall x$.

$$\begin{aligned} a+b \quad\quad +d &= 0 \\ a+2b \quad\quad +3d &= 0 \\ b+c+3d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } 4,\ \text{l. u. a} \Rightarrow \text{Basis.}$$

Martin Ueding #4 Richard

20a) Divergiert: $-2, 4, -8$

20b) $\frac{n^2}{n^2+2n+1} \xrightarrow{\text{l'Hospital}} \frac{2n}{2n+2} \to \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

20c) $\frac{n}{2^n} + 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to \underbrace{\frac{1}{e^{\ln 2 n} \cdot \ln 2}}_{e^n > 0 \Rightarrow \frac{1}{e^n} \to 0} + \cancel{4 \frac{n}{n+1}} \; 4 \cdot \underbrace{\frac{n^2}{n^2+2n+1}}_{= 1, \text{ s.o.}}$

$\to \underline{\underline{0+1 = 0}}$

20d) $\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \to \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$= \frac{3}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

20e) $\frac{n^2+2n-2}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-3}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-3}{(n+1)^2} \to$

$\lim 1 - \lim \frac{-3}{(n+1)^2} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$

Oder mit l'Hospital: $\frac{n^2+\dots}{n^2+\dots} \to 1$

20f) $\frac{n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} \xrightarrow{(l'H)^3} \frac{1}{6n}, \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n} = 0$