Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul math141.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math141/ gefunden werden.

[disclaimer]

1

a) $9x = 6y + 3$ $\qquad$ x bel.

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{6}(3 - 9x)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$

$\mathbb{L} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\}$

b) $9x = 6y + 3$ $\qquad \rightarrow \qquad$ $9x - 6y = 3$

$4x - 3y = 0$ $\qquad\qquad$ $4x - 3y = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{A} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} \qquad Ax = b$$

$$(A\ b) = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3/4+\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 + 4\cdot(-\frac{2}{3}) \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$y = 4$$

$$\mathbb{L} = \{(-\frac{7}{3}, 4)\}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} 9x-6y=3 \\ 2x-y=0 \\ 8x-6y=4 \end{array}\right\} (Ab) = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{L} = \emptyset$

d) $x + y = 4$
$x - y = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{(3, 2)\}$

e) $x + y + z = 1$
$y + z = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

z bel.

$y = 2 - z$
$x = -1$

$\mathbb{L} = \{(-1, 2-z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

f) $x + y + z = 0$
$x + y - z = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$z = -2$

y bel.

$x = -y - z = -y + 2 = 2 - y$

$$\mathbb{L} = \{ (x, y, -2) \mid x = 2 - y \wedge y \in \mathbb{R} \}$$

2

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{L} = \{ (-2, -4, -6) \}$$

3

a) $$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)^{-1} = \left(\frac{(1+x) + (1-x)}{1-x^2} \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1-x^2)$$

b) $\dfrac{x^4-1}{x-1} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$

$= \dfrac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x-1)} = (x^2+1)(x+1)$

$= x^3+x^2+x+1$

c) $\dfrac{4x^3+4x^2+3x+9}{2x+3} =$

$(2x+3)(2x^2-x+3)$

$4x^3+6x^2-2x^2-3x+6x+9$

$4x^3+4x^2+3x+9$

$2x^2-x+3$

d) $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \quad \forall\ a,b \in \mathbb{R}$

$a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2$

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

Reelle Quadrate sind nie negativ.

$\square$

e) $a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$

Da a und b immer positiv sind, kann man ohne "±" die Wurzel ziehen.

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \iff a+b \leq 2b$$

$a \leq b$, siehe Anfangsbedingungen

$\square$

f) $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a-b|)$
$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Für $a = b$:

$$a = \frac{1}{2}(a + a + 0) \quad \checkmark$$

Für $a > b$:

$$a = \frac{1}{2}(a+b + a-b) \quad \checkmark$$

Für $a < b$:

$$b = \frac{1}{2}(a+b + b-a) \quad \checkmark$$

$\square$

4

a) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R},$

$x \geq 0,$

$n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^i$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{x^k}{n^k} - \frac{x^k}{k!} \leq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \left(\frac{n!}{k!(n-k)!\, n^k} - \frac{1}{k!}\right) \leq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} - 1\right)}_{\leq 0} \leq 0$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k$$

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}_{k\text{-mal}} \leq \underbrace{n\cdot n\cdot n\ldots}_{k\text{-mal}}$$

$$n-1 \leq n$$

$\Rightarrow$ Obige Aussage stimmt $\square$

b) $n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 4$

Induktionsanfang:

Für $n=4$: $4^2 \leq 2^4$

$16 \leq 16$ ✓

Ind. Schluss: $n \geq 4$

Für $n+1$: $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$

$$n^2 + 2n + 1 \leq 2^n \cdot 2$$

$$n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2^n$$

Falls $2n+1 \leq 2^n$ gilt, gilt obige Ungleichung. Beweis durch Induktion:

$n=4$: $8+1 \leq 16$

$n+1$: $2(n+1) \leq 2^{n+1}$

$$2n + 2 \leq 2^n + 2^n$$

Falls $2 \leq 2^n$ gilt, gilt obiges. Für $n=4$ gilt es, für $n+1$ auch, da aus 2^n $2 \cdot 2^n$ wird.

Somit gelten die obere und die Gleichung darüber.

$\square$

c) $2^n < n!$ $\quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 4$

$$2^4 < 4! \rightarrow 16 < 24$$

$$2^{n+1} < (n+1)!$$

$$2^n \cdot 2 < n! \cdot n$$

Da $2^n < n!$ bei $n = 4$ gilt, $2 < n$ ist, gilt dies für alle $n > 4$.

$\square$

5

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Für $n = 1$:

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 \quad \checkmark$$

Für $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$4\sum k^3 = (n+1)^2(n+2)^2 - 4(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2\left((n+2)^2 - 4(n+1)\right)$$

$$= (n+1)^2\left(n^2+4n+4-4n-4\right)$$

$$= (n+1)^2 n^2$$

Also gilt $A(n+1)$, daher gilt A für alle $n \geq 1$. $\square$

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Für $n=1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1} \qquad \checkmark$$

Für $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$0 = \frac{(n+1)^2 - 1 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$0 = n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 - 2n$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Somit gilt $A(n)$ für alle n. $\square$